微積分（4コマ目）

指数関数と三角関数（複素数）

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

指数法則 ⟷ 加法定理

$$e^{i(x_1+x_2)} = e^{ix_1} e^{ix_2}$$

多項式ぐらいを知っていたとして

無限小の多項式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \cdots$$

$$e^x e^y = \left\{ 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right\}\left\{ 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \cdots \right\}$$

$x^i x^j$ の係数と比較　$\frac{x^i}{i!}$　$\frac{y^j}{j!}$　$\frac{1}{i!j!}$

（~~自然数~~ i と j は自然数）

$$i + j = n$$

2項定理

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \bigcirc\, x^i y^j$$

report I. この等式を完成させよ！

reportのしめきり 来週月 自然D705

加法定理

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos(x+y) =$$

$$\sin(x+y) =$$

Report $x^i y^j$の係数を比較して、上の等式を完成させよ

微分方程式

人口	1年後（増える）
100万	1000
200万	2000

人口を $x(t)$ 時刻 t の関数

$$x' = ax \quad (a\text{は定数})$$

これが微分方程式

$$x' = \frac{dx}{dt}$$

$$x = Ce^{at}$$

大文字

$$\left(\begin{array}{l} x = ce^{at} \\ x' = cae^{at} = a(\underbrace{ce^{at}}_{x}) \end{array} \right)$$

$x' = ax$ について、

本当に解は $x = ce^{at}$ だけ?

$x' = ax$ を満たす関数 $x = x(t)$

$$\frac{x}{e^{at}} = c$$

$$\left(\frac{x}{e^{at}}\right)' = \frac{x'e^{at} - x(e^{at})'}{(e^{at})^2}$$

$$= \frac{axe^{at} - xae^{at}}{(e^{at})^2} = 0 \quad (t\text{に関わらず})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x}{e^{at}} = c \qquad x = ce^{at}$$

定理

微分方程式 $x' = ax$ の解は
$x = ce^{at}$ に限る

$t = 0$ のときの x の値が c

時刻 $t = 0$ の時の人口ですべて決まる
初期条件

決定論的
自由意志

放射性元素
炭素
年代測定
半減期

$x(T) = \frac{1}{2}x(0)$ このTが半減期

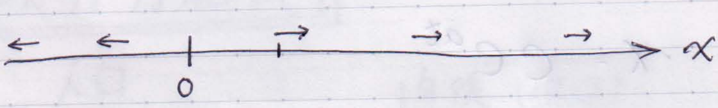
Report IV (i) T は $x(0)$ によらず
$T = -\frac{\log 2}{a}$ で与えられることを示せ。

Report IV

(ii) $x((j+1)T) = \frac{1}{2}x(jT)$ を示せ

$(j = 0, 1, 2, \dots)$

$x' = ax \quad a > 0$



$\frac{dx}{dt} = (a - bx)x$ aもbも正

0になるのは $a = bx$ $x = \frac{a}{b} = K$ とおく

微分方程式の解法

$\cancel{x'(t) = x(t)}$

$$x(t+d) = x(t) + x'(t)d$$

$$D_1 = D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$$

$$d \in D \ \& \ \alpha \in \mathbb{R} \to \alpha d \in D$$

$$\because \ (\alpha d)^2 = \alpha^2 d^2 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} d_1 \in D \\ d_2 \in D \end{matrix}\right\} \not\Rightarrow d_1 + d_2 \in D$$

$$(d_1 + d_2)^2 = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{d_1^2}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{d_2^2}} + 2 d_1 d_2$$

$$D_2 = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^3 = 0 \}$$

$$D_3 = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^4 = 0 \}$$

$$D_n = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^{n+1} = 0 \}$$

$$(d_1 + d_2)^3 = d_1^3 + 3 d_1^2 d_2 + 3 d_1 d_2^2 + d_2^3$$

$$= 0$$

$$\left.\begin{matrix} d_1 \in D \\ d_2 \in D \end{matrix}\right\} \Rightarrow d_1 + d_2 \in D_2$$

指数関数と三角関数(複素数)

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

指数法則 $\overset{同じ}{\Longleftrightarrow}$ 加法定理

$e^{x+y} = e^x e^y$

$e^{i(x_1+x_2)} = e^{ix_1} e^{ix_2}$

多項式ぐらいを知ってたとしてる

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ 無限次の多項式

$\boxed{e^{x+y} = e^x e^y}$

$x^i y^j$ の係数と比較

i と j は自然数 $i + j = n$

○ $e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{3!} +$ 　x と y の無限次の多項式

2項定理

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} +$

$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \cdots$

$\frac{(x+y)^n}{n!} = \bigcirc x^i y^j$

report I

○ $e^x e^y = \{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \} \{1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \}$

$\frac{x^i}{i!}$ 　 $\frac{y^j}{j!}$ 　 $\frac{1}{i!j!}$

加法定理

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + $$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

x, y

Ⅱ $\cos(x+y) =$

Ⅲ $\sin(x+y) =$

来週(月)

自然 D705

微分方程式

人口 $x(t)$

時刻の関数 t

$$x' = \frac{dx}{dt}$$

人口	年間
100万	1000
200万	2000

$x' = ax$ (aは定数)

微分方程式

大文字

$$x = Ce^{at}$$

$$x' = Cae^{at} = a\underbrace{(Ce^{at})}_{x}$$

$x' = ax$ を満たす関数 $x = x(t)$

$$\left(\frac{x}{e^{at}}\right)' = \frac{x'e^{at} - x(e^{at})'}{(e^{at})^2}$$

$$= \frac{axe^{at} - xae^{at}}{(e^{at})^2} = 0$$

$$\frac{x}{e^{at}} = C \qquad x = Ce^{at}$$

定理 微分方程式 $x' = ax$ の解は ($a<0$)

$x = Ce^{at}$ に限る

$t = 0$ 時刻 $t=0$ の時の人口ですべて決まる

初期条件

自由意志

決定論的

半減期

放射性元素 炭素

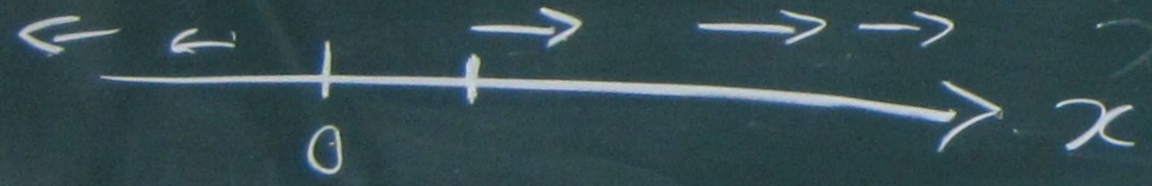
$x(T) = \frac{1}{2}x(0)$ T 半減期 年代測定

Ⅳ (i) T は $x(0)$ によらず

$T = -\frac{\log 2}{a}$ で与えられることを示せ

(ii) $x((i+1)T) = \frac{1}{2}x(iT)$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$) を示せ

$x' = \underline{ax}$ $\quad a > 0$



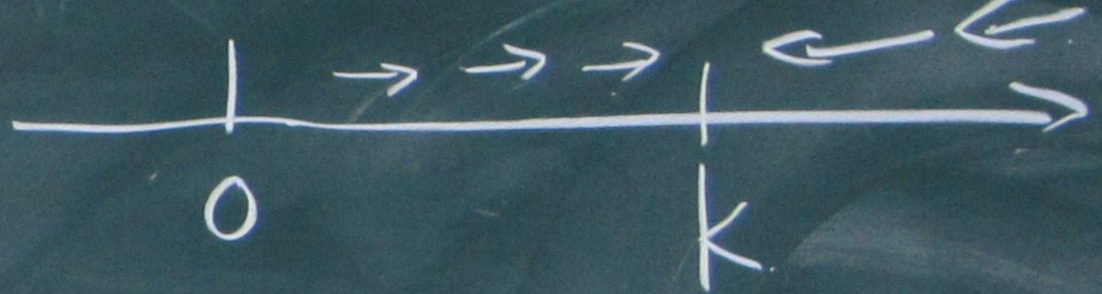
a も b も正

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)x$$

$$a = bx$$

$$x = \frac{a}{b} = K$$

数理生態学



微分方程式の解法

$$x(t+d) = x(t) + x'(t)d$$

$$D_1 = D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$$

$$d \in D \ \& \ \alpha \in \mathbb{R} \longrightarrow \alpha d \in D$$

$$(\alpha d)^2 = \alpha^2 d^2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \in D \\ d_2 \in D \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow d_1 + d_2 \in D_2 \\ \not\Rightarrow d_1 + d_2 \in D \end{array}$$

$$(d_1 + d_2)^2 = \underset{0}{\overset{\shortparallel}{d_1^2}} + \underset{0}{\overset{\shortparallel}{d_2^2}} + 2d_1 d_2$$

$$D_2 = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^3 = 0 \}$$

$$D_3 = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^4 = 0 \}$$

$$D_n = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^{n+1} = 0 \}$$

$$(d_1 + d_2)^3 = \underline{d_1^3} + \underline{3d_1^2 d_2} + \underline{3d_1 d_2^2} + \underline{d_2^3}$$

$$= 0$$