微積分（3コマ目）

三角関数

度 → radian

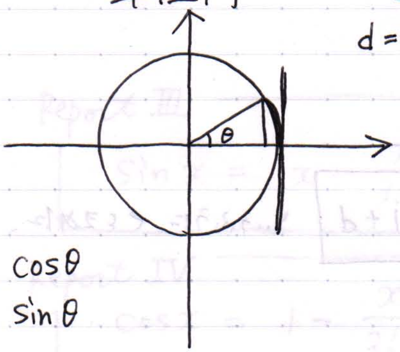
@ 慣性の法則（Galileo → Newton）

物体は外力を受けない時、等速度運動をする

@ 無限小における慣性の法則

物体は外力を受けても非常に小さい経過時間の間は等速度運動をする

単位円



$\cos\theta$
$\sin\theta$

$d^2 = 0$
$d = \theta \in D$

そのとき $\cos d = 1$
$\sin d = d$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\sin(x+d) = \sin x \underbrace{\cos d}_{1} + \cos x \underbrace{\sin d}_{d}$$

$$= \sin x + d\cos x$$

$$\sin(x+d) - \sin x = d\cos x$$
$$(\sin x)' = \cos x$$

report

Ⅰ $(\cos x)' = -\sin x$ を示す。

Ⅱ $(\tan x)'$ を計算せよ

締め切りは 再来週の月曜日（D705）

指数関数

底10

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

($\cancel{\quad}$ $10^0 = 1$)

$$10^d = 1 + \underbrace{a}_{\in\mathbb{R}}d \quad (\forall d \in D)$$

$\mathbb{R}$ 唯1つ定まる

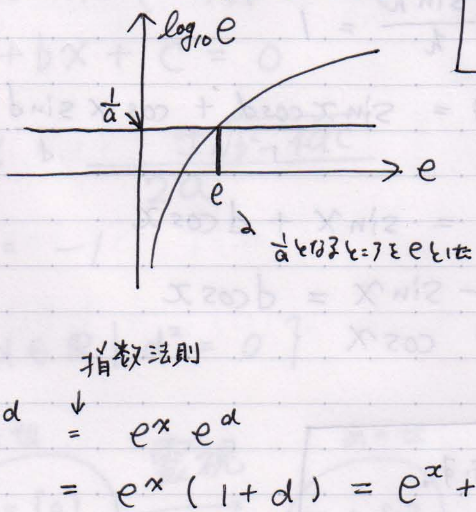
底をとりかえる

e 何でもいい

指数法則

$$e^d = \left(10^{\log_{10} e}\right)^d = 10^{\underbrace{(\log_{10} e)}_{\text{定数}}d}$$

$$= 1 + \underbrace{a(\log_{10} e)}_{\text{微分係数}}d$$



$\boxed{(e^d) = 1+d}$ というふうに e をきめた。

$f'(0) = 1$

$e^0 = 1$

指数法則

$$e^{x+d} \overset{\downarrow}{=} e^x e^d$$

$$= e^x(1+d) = e^x + e^x \cdot d$$

三角関数
指数関数 } 親せきなのでは？

数Ⅱ　多項式

$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ （n次の多項式）

$f(0) = a_0$

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots$

$f'(0) = a_1$

$f''(x) = 2a_2 + \cdots$

$f''(0) = 2a_2 \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2}$

⋮

$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

三角関数と指数関数は
無限次の多項式で表わせる

$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

$a_0 = \sin 0 = 0$

$a_1 = (\sin x)'(0) = \cos 0 = 1$

$a_2 = \frac{(\sin x)''(0)}{2} = \frac{-\sin 0}{2} = 0$

Report Ⅲ

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \cdots}$$

※帰納法等で証明する

Report Ⅳ

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \cdots}$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

$(e^x)' = e^x$

実数 x の代わりに複素数 $z = x + iy$

特に $z = iy$（純虚数）

$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots$

$= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots$

（前の式）

実部と虚部に分ける

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \cos y + i \sin y$$

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$$

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$ （指数法則）

$$e^{i(y_1 + y_2)} = \underline{\cos(y_1 + y_2)} + i\,\underline{\sin(y_1 + y_2)}$$

加法定理

$$\parallel$$

$$e^{iy_1} e^{iy_2} = \{\cos y_1 + i \sin y_1\}\{\cos y_2 + i \sin y_2\}$$

$$= \underline{(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2)} + i\,\underline{(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)}$$

$$\Downarrow$$

指数法則と加法定理は親せきだ！

多項式

三角関数

度 → radian

慣性の法則 (Galileo → Newton)

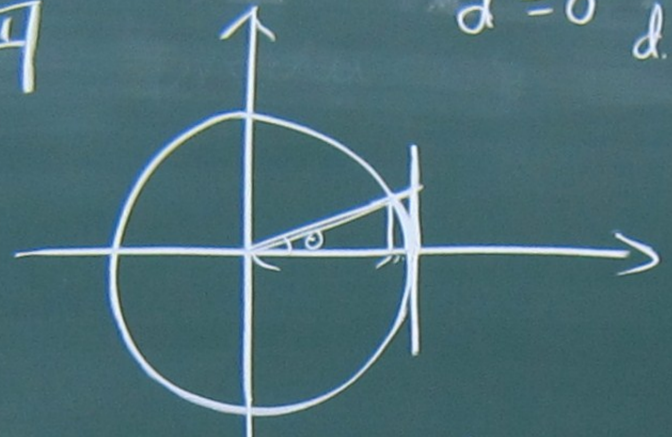
物体は外力を受けない時
等速度運動をする

無限小における慣性の法則

物体は外力を受けても
非常に小さい経過時間の間は
等速度運動をする

単位円

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$



$d^2 = 0 \quad d = 0 \in D$

月 D705

$\cos\theta$	$\cos d = 1$
$\sin\theta$	$\sin d = d$

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1}$$

$$\sin(x+d) = \sin x \underbrace{\cos d}_{=1} + \cos x \underbrace{\sin d}_{d}$$

$(\sin x)' = \cos x$

$$= \sin x + d\cos x$$

$$\sin(x+d) - \sin x = d\cos x$$

report

I $(\cos x)' = -\sin x$ を示せ.

II $(\tan x)'$ を計算せよ.

指数関数

底 10

極限

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$10^0 = 1$

例 $f'(0) = 1$

2.7…

底をとりかえる

e 何でも…

$e^0 = 1$

$f(x) = e^x$

$10^{\log_{10} 100} = 10^2 = 100$

$10^{\log_{10} e} = e$

指数法則

$\boxed{(e^d) = 1 + d}$

定数

$$e^d = \left(10^{\log_{10} e}\right)^d = 10^{(\log_{10} e) d}$$

$$= 1 + a(\log_{10} e) d$$

微分係数 $\frac{1}{a}$

$$10^d = 1 + \underline{a} d \quad (\forall d \in D)$$

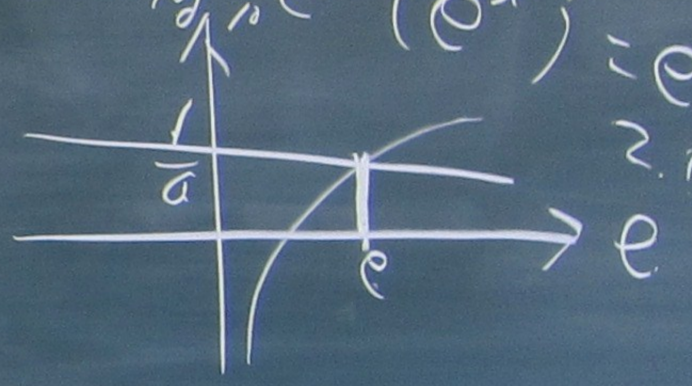
$\mathbb{R}$ 唯1つ定まる

指数法則

$$e^{x+d} = e^x e^d$$

$$= e^x \underline{(1+d)} = e^x + d\, e^x$$

$(e^x)' = e^x$



三角関数
指数関数

親分 無限次の多項式で表わせる

数II 多項式

$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ (n次の多項式)

$f(0) = a_0$

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots$

$f'(0) = a_1$

$f''(x) = 2a_2 + \cdots$

$f''(0) = 2a_2$ $\quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}$

$\vdots$

$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ III

$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

$a_0 = \sin 0 = 0$

$a_1 = (\sin x)'(0) = \cos 0 = 1$

$a_2 = \frac{(\sin x)''(0)}{2} = \frac{-\sin 0}{2} = 0$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$

IV $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$

指数関数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$(e^x)' = e^x$$

数 x の代りに複素数 $z = x + iy$

特に $z = iy$（純虚数）

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots$$

$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!}$$

実部と虚部に分ける

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} \cdots\right)$$

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$ 加法定理

（指数法則）

$$e^{i(y_1+y_2)} = \cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)$$

$$\|$$

$$e^{iy_1} e^{iy_2} = (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2)$$

$$= (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)$$