微積分

reportについて

αセカリ 3月12日(月)

Fax 029-853-6501 (このFaxは共用なので「西村あて」と書く)

e-mail : logic@math.tsukuba.ne.jp

8Mぐらいのサイズまでにしておくこと。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$$ 実数の世界

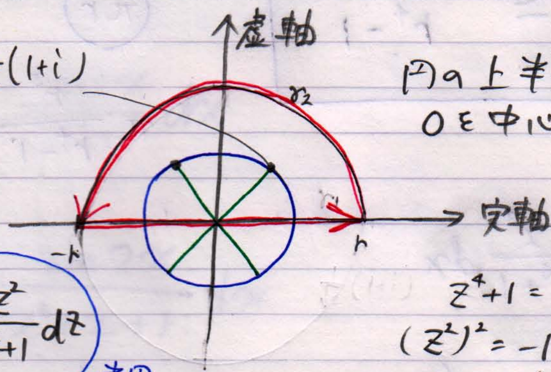
$$= \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

複素平面で定義された関数を考える。

$$\frac{z^2}{z^4+1}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$



円の上半部

0を中心 半径r(十分大きく取る)

$z^4+1=0$

$(z^2)^2=-1$

$z^2=\pm i$

$$\int_{\gamma_1} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz$$

半円 評価

$r\to\infty$のとき 0にいく

$$\frac{\sqrt{2}(1-i)}{8} \qquad \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{8}$$

$$= 2\pi i\left\{\frac{\sqrt{2}(1-i)}{8} + \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{8}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq M \times (\gamma の長さ) \quad (|f(z)| \leq M のとき)$

$\left(|f(x)| \leq M \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \right)$

$|z^2| = r^2$

…… 三角不等式

$z^4 = z^4 + 1 - 1$

$|z^4| = |(z^4+1) - 1|$

$r^4 \leq |z^4+1| + 1$

$|z^4+1| \geq r^4 - 1$

$$\boxed{\left|\frac{z^2}{z^4+1}\right| \leq \frac{r^2}{r^4-1}}$$

πr

$\pi \frac{r^3}{r^4-1} \to 0$

$(r \to \infty)$

I (1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{x^6+1}\,dx$

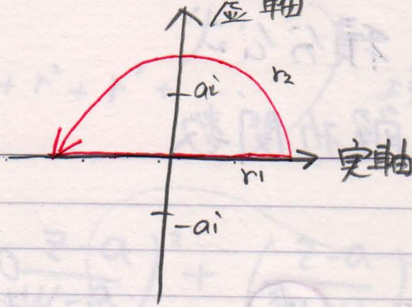
(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+6x^2+8}$

(3) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+a^4} \quad (a>0)$

↑ 偶関数なので、$\int_{-\infty}^{\infty}$ の形にできる。

$a>0 \quad \lambda>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2+a^2}\,dx$$



$$= \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\cos \lambda x}{x^2+a^2}\,dx$$

$$\boxed{f(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{z^2+a^2}}$$

特異点 $\pm ai$

$z = x$の場合

$$e^{i\lambda x} = \underline{\cos\lambda x} + i \sin \lambda x$$

評価 $\nearrow 0$

$$\int_{r_1} f(z)\,dz + \int_{r_2} f(z)\,dz$$

aiにおける値は $\dfrac{e^{-\lambda a}}{2ai}$

$$= \frac{e^{-\lambda a}}{2ai} \times 2\pi i = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{a}$$

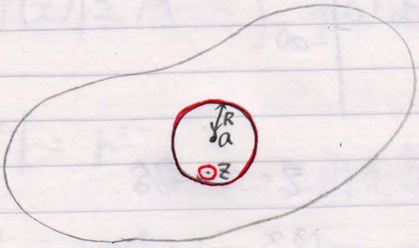
II

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\,dx$

Cauchy の積分公式

$f(z)$ 解析関数



aを中心
半径Rの円γ

zを中心
半径rの円γ_1

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$$

$\gamma \cup \gamma_1$ 閉曲線

閉曲線の向きは内部を左側になるように取る

$$\int_{\gamma\cup\gamma_1} g(w)\,dw = 0$$

$$\shortparallel$$

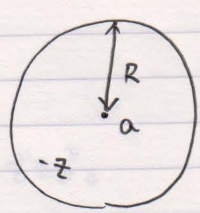
$$\int_\gamma g(w)\,dw - \int_{\gamma_1} g(w)\,dw = 0$$

$$f(w) \to f(z)$$

$2\pi i$

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z)\int \frac{dw}{w-z}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$



$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)}$$

$|w-a| = R$
$|z-a| < R$

$$= \frac{1}{w-a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}$$

(等比級数

$|r| < 1 \qquad \dfrac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$) より、

$$= \frac{1}{w-a}\left\{1 + \frac{z-a}{w-a} + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2 + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(w-a)^3} + \cdots$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_r \frac{f(w)}{w-a}\,dw + (z-a)\int_r \frac{f(w)}{(w-a)^2}\,dw\right.$$

$$\left. + (z-a)^2\int \frac{f(w)}{(w-a)^3}\,dw + (z-a)^3\int\{\quad\}\cdots\right.$$

$$t_0 + t_1(z-a) + t_2(z-a)^2 + \cdots$$

の形にすることができた。

report 1/14日 $\frac{\sqrt{2}(1-i)}{8} - \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{8}$

3月12日(月)

fax 029-853-6501

西村 共用

e-mail

logic@math.tsukuba.ac.jp

~~10~~ 8M

実数の世界

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx$$

$$=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{x^2}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi \quad \int_{\gamma_1}\frac{z^2}{z^4+1}dz+\int_{\gamma_2}\frac{z^2}{z^4+1}dz=$$

$$\frac{z^2}{z^4+1}$$

円の上半部

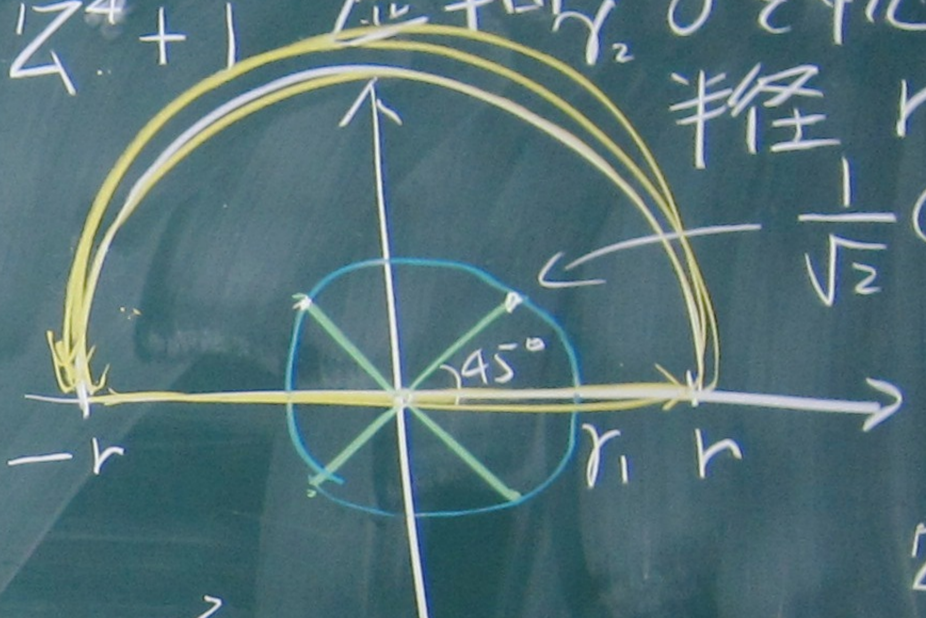
rは十分大きくとる

特異点

虚軸

γ_2 0を中心 半径 r

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$



実軸

$z^4+1=0$

$(z^2)^2=-1$

$z^2=\pm i$

$$\int_{\gamma_1} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz \to 0$$

半円

評価 $|f(x)| \le M$ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M(b-a)$

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M \times (\gamma\text{の長さ}) \qquad |f(z)| \le M$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{\sqrt{2}(1-i)}{8} + \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{8} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$r \to \infty$

$|z^2| = r^2$

三角不等式

$$\pi \frac{r^3}{r^4-1} \to 0$$

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{x^6+1}\,dx$

$z^4 = z^4+1-1$ $\quad |z^4+1| \ge r^4-1$

$|z^4| = |(z^4+1)-1|$

$$\boxed{\left|\frac{z^2}{z^4+1}\right| \le \frac{r^2}{r^4-1}}$$

πr

$r^4 \le |z^4+1|+1$

(3) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+a^4}$ $(a>0)$ $= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+a^2}$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+6x^2+8}$

report 出日

3月12日(月)

Fax 029-853-6501 西村 共用

e-mail

logic@math.tsukuba.ac.jp

~~10~~ 8M

$$\boxed{f(z)=\frac{e^{i\lambda z}}{z^2+a^2}}$$

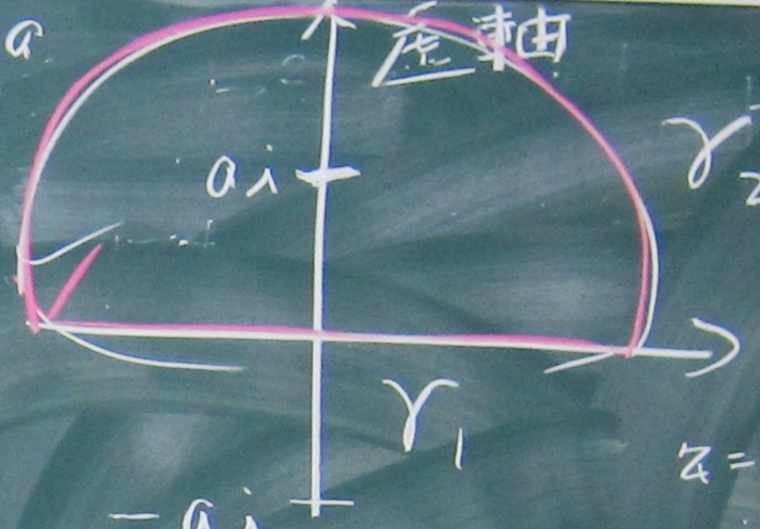
$a>0 \quad \lambda>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{a}$$

$$=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}dx$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz=\frac{\pi e^{-\lambda a}}{a}$$

$\to 0$



評価

特異点

実軸 $\pm ai$

$$\frac{e^{-\lambda a}}{2ai}\times 2\pi i$$

$z=x$

$$e^{i\lambda x}=\cos\lambda x+i\sin\lambda x$$

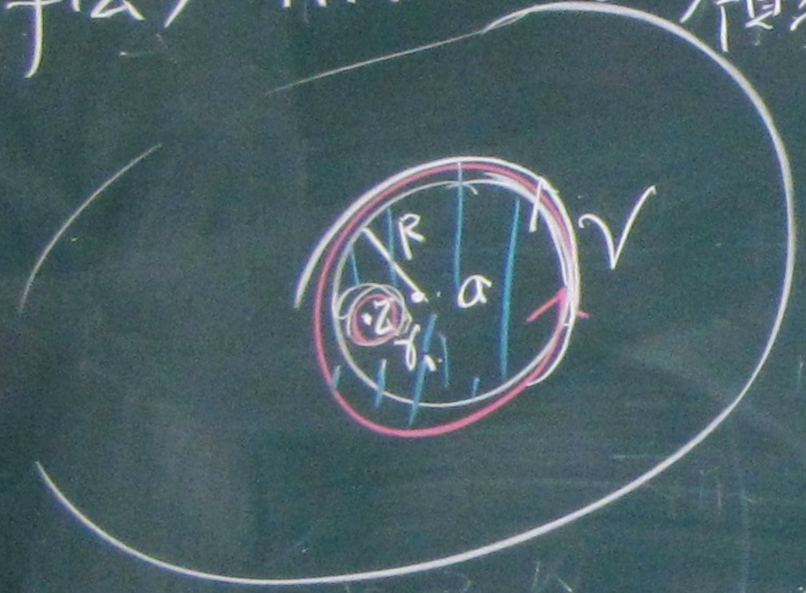
π

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^4+1}dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}dx$

Cauchyの積分公式　閉曲線

$f(z)$ 解析関数　領域　向き



aを中心
半径R の円 γ

zを中心 の円 γ_1
半径r

$\gamma \cup \gamma_1$ 閉曲線

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$$

$$f(w) \to f(z)$$

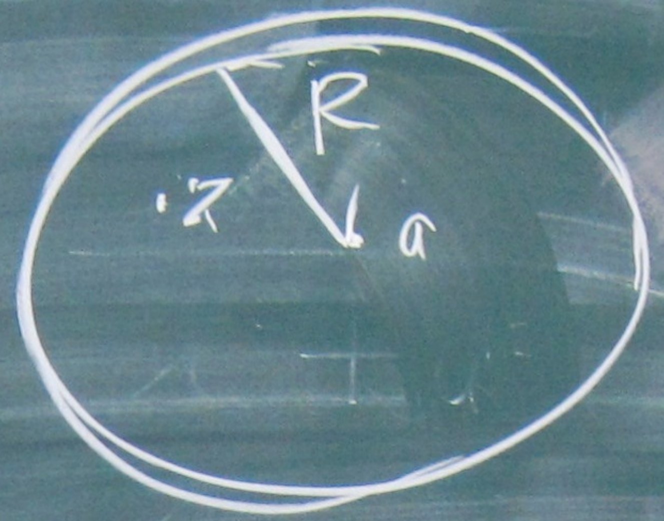
$$\int_{\gamma\cup\gamma_1} g(w)\,dw = 0$$

$$\|$$

$$\int_\gamma g(w)\,dw - \int_{\gamma_1} g(w)\,dw = 0$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z)\int \frac{dw}{w-z} \quad 2\pi i$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$



等比級数

$$|r|<1 \quad \frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 +$$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} \quad |w-a| = R$$

$$|z-a| < R$$

$$= \frac{1}{w-a}\left(\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right) = \frac{1}{w-a}\left\{1 + \frac{z-a}{w-a} + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2 + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^3 + \right.$$

$$= \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(w-a)^3} + \cdots$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\gamma \frac{f(w)}{w-a}\,dw+(z-a)\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^2}\,dw+(z-a)^2\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^3}\,dw+(z-a)^3\int\right.$$

$$t_0+t_1(z-a)+t_2(z-a)^2+$$