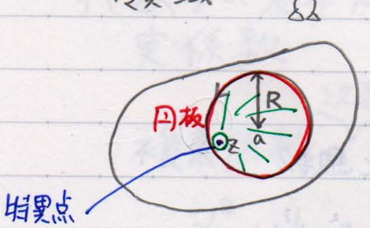
複素関数論

領域



円板 γ

中心：a

半径：R

zは円板の内部の点

wは複素数を動く

$$\int_\gamma f(w)\,dw = 0$$

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ 解析関数

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$$

円板 γ_1

zを中心　半径r（非常に小さく）

$\gamma \cup \gamma_1$ 閉曲線

$$\int_{\gamma\cup\gamma_1} g(w)\,dw = 0$$

$$\int_\gamma g(w)\,dw - \int_{\gamma_1} g(w)\,dw = 0$$

$$\int_\gamma g(w)\,dw = \int_{\gamma_1} g(w)\,dw$$

$r \to 0$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$, $f(w) \to f(z)$

$$f(z)\int_{\gamma_1} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i f(z)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

多項式

$$t_0 + t_1(z-a) + t_2(z-a)^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{\underbrace{(w-a)}_{R} - \underbrace{(z-a)}_{\hat{R}}}$$

等比級数

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

$$= \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1)$$

$$= \frac{1}{w-a} \boxed{\frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}}}$$

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{w-a}\left\{1 + \frac{z-a}{w-a} + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2 + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(w-a)^3} + \cdots$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\underbrace{\int_r \frac{f(w)}{w-a}dw}_{\text{定数}} + (z-a)\underbrace{\int_r \frac{f(w)}{(w-a)^2}dw}_{\text{定数}}\right.$$

$$\left. + (z-a)^2 \underbrace{\int_r \frac{f(w)}{(w-a)^3}dw}_{\text{定数}} + \cdots\right\}$$

結論

$f(z)$という解析関数は少なくともrの内部では無限次の多項式に書ける。

複素関数論

領域 Ω

$f: \Omega \to \mathbb{C}$ 解析関数

円板 γ

a: 中心

R: 半径

z は円板の内部の点

w は複素数を動く

$$\int_\gamma f(w)\,dw = 0$$

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$$

円板 γ_1

z を中心

半径 r (非常に小さく)

$\gamma \cup \gamma_1$ 閉曲線

$$\int_{\gamma\cup\gamma_1} g(w)\,dw = 0$$

$$\int_\gamma g(w)\,dw - \int_{\gamma_1} g(w)\,dw = 0$$

$$\int_\gamma g(w)\,dw = \int_{\gamma_1} g(w)\,dw$$

$r \to 0$

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$f(w) \to f(z)$$

$$f(z)\int_{\gamma_1} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i\, f(z)$$

$2\pi i$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

等比級数 $1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}\quad(|r|<1)$ $\qquad \left|\frac{z-a}{w-a}\right|<1$

多項式

$$t_0+t_1(z-a)+t_2(z-a)^2+\cdots$$

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{\underset{\text{大}}{(w-a)}-\underset{\text{小}}{(z-a)}}$$

$$=\frac{1}{w-a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}$$

$$=\frac{1}{w-a}\left\{1+\frac{z-a}{w-a}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(w-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(w-a)^3}+\cdots$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\underset{\text{定数}}{\int_\gamma\frac{f(w)}{w-a}dw}+(z-a)\underset{\text{定数}}{\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-a)^2}dw}+(z-a)^2\underset{\text{定数}}{\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-a)^3}dw}+\cdots$$

結論　f(z)という解析関数は少なくともγの内部では無限次の多項式に書ける

代数学の基本定理　証明

実係数　$x^2+1=0$

次数が1以上

複素係数の多項式は必ず解をもつ（複素数一つ）

$\frac{1}{x^n+\cdots+}$

$= z^n\left(1+\frac{}{z}+\cdots\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$　$|f(z)|\le M$　多項式

$z^2+1=(z-i)(z+i)$

$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+z^n$

背理法

f(z)が解を持たないと仮定

$|f(x)|\le M$

$x\to+\infty$

$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le M(b-a)$　区間の長さ

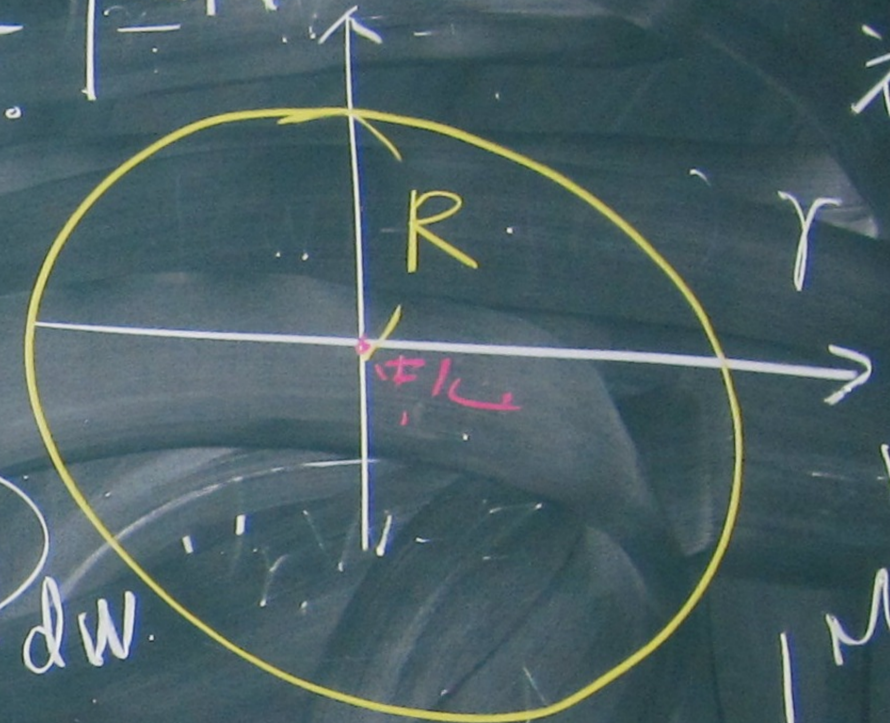
$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|\le M\times(\gamma の長さ)$

$g(z)=\frac{1}{f(z)}$ = C解析関数　C全体で定義されている

$z\to+$

$\left|\frac{1}{z^n+\cdots+a_0}\right|\le M$

複素平面



γ　中心0　半径R　円

$R\to\infty$

$\int_\gamma \frac{|f(w)|}{w^2}\,dw$　$\le M$

$\left|\frac{1}{w^2}\right|\le\frac{1}{R^2}$　M　$2\pi R$

$=\frac{2\pi}{R}\to 0$

report 問題

$$(z-a_1)\frac{z\text{の高々}n-1\text{次の多項式}}{z\text{の}n\text{次の多項式}} = \frac{t_1}{z-a_1} + \frac{t_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{t_n}{z-a_n}$$

(未定係数)　$z \to a_1$ 極限

異なる1次式に分解

$(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$

簡単に　面倒臭い

t_1を知りたい

右辺に $z-a_1$ を掛ける

$$t_1 + \frac{z-a_1}{z-a_2}t_2 + \cdots + \frac{z-a_1}{z-a_n}t_n$$

$a_1, \cdots, a_n$はすべて異なる

$\downarrow$ 0　　$\downarrow$ 0

$\downarrow$ t_1

来週の月

(1) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} \quad (a>b>0)$$

(2) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta}$$

(1) $$\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

(2) $$\frac{\pi}{a\sqrt{1+a^2}}$$