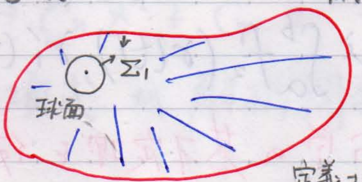
# 複素積分

Gaussの法則　空間(3次元)

○点電荷　　閉曲面Σ

電場
(ベクトル場)




Ω
Σで囲まれる領域

定義されていない特異点

$$\int_{\Sigma} \mathbb{f}\, d\mathbb{S} = \int_{\Omega} \mathrm{div}\, \mathbb{f}\, dv$$

(Gaussの発散定理)

面積分

$$\int_{\Sigma \cup \Sigma_1} \mathbb{f} \cdot d\mathbb{S} = 0$$

$$\parallel$$

$$\int_{\Sigma} \mathbb{f} \cdot d\mathbb{S} - \int_{\Sigma_1} \mathbb{f} \cdot d\mathbb{S} = 0$$

(面の向きに注意)

平行した話　　$r$: 閉曲線

複素平面　$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
(2次元)

$$\int_{r} f(z)\, dz = 0$$

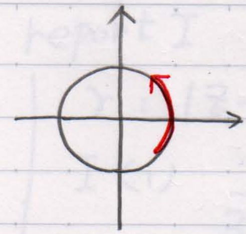
(stokesの定理)

線積分　　　面積分

$f(z)$ が 解析関数 のとき、

$f(z) = z^3 + 2z + 1$ は 問題がない。

$f(z) = \dfrac{1}{z}$　　0: 特異点　$|z| = 1$ 単位円



左側に内部

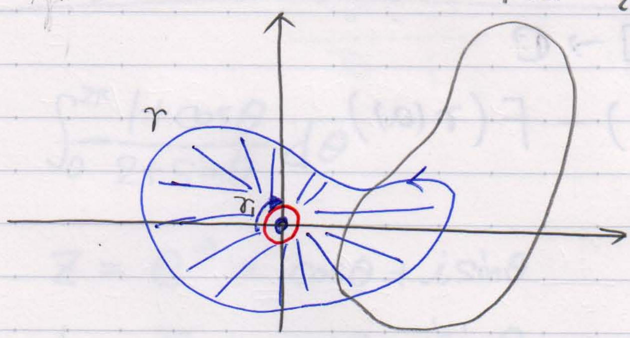
$z = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} i d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

任意の閉曲線

$f(z) = \frac{1}{z}$




$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 0$$

$\gamma \cup \gamma_1$

$$\int_{\gamma \cup \gamma_1} f(z)dz = 0$$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz = 2\pi i$$

$a \in \mathbb{C}$

$f(z) = \frac{1}{z-a}$ $a$が特異点, $\gamma$: 閉曲線

$\int_\gamma f(z)dz = 0$ ($a$が外部にある)

$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i$ ($a$が内部にある)

$f(z) = \frac{b}{z-a}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ $a$とするは $2\pi i b$ ($a$が内部)

$0$ ($a$が外部)

$f(z) = z^n \quad n \in \mathbb{Z}$

$n \neq -1$

$F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$ が $f(z)$ の原始関数

$\gamma$ 任意の曲線 $[a, b] \to \mathbb{C}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

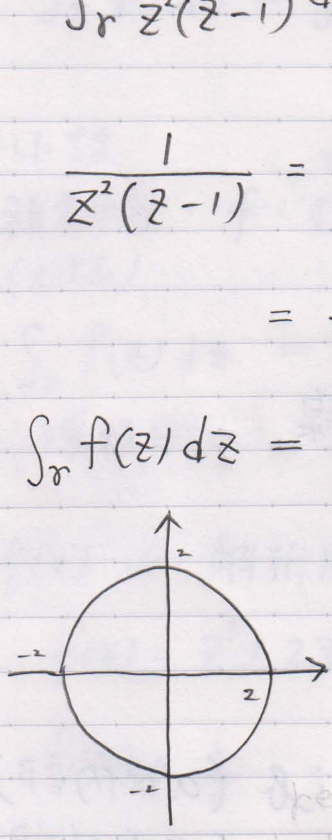
$\gamma : |z| = 2$ 円

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2(z-1)}\,dz$$

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{t_1}{z-1} + \frac{t_2}{z} + \frac{t_3}{z^2}$$ (部分分数に分ける)

$$= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{dz}{z-1} - \int_\gamma \frac{dz}{z} - \underbrace{\int_\gamma \frac{dz}{z^2}}_{=0}$$




$$= 2\pi i - 2\pi i$$

$$= 0$$

report I

$\gamma : |z-1| = \frac{1}{2}$

I (1) $\frac{z}{3z-2}$ (2) $\frac{1}{z^2-3z+2}$

$\left( \frac{\frac{1}{3}(3z-2) + \bigcirc}{3z-2} \right)$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos\theta}{2+\sin\theta} d\theta$$

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\pm) \quad \frac{1}{z} = \bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta \quad \therefore \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$z - \frac{1}{z} = 2i\sin\theta \quad \therefore \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

$\frac{dz}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta \quad d\theta = \frac{1}{iz} dz$

$1 + \cos\theta = 1 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+2z+1}{2z}$

$2 + \sin\theta = 2 + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+4iz-1}{2iz}$

$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos\theta}{2+\sin\theta} d\theta$ （$\gamma$ は単位円とする。）

$\int_\gamma \frac{z^2+2z+1}{z(\underline{z^2+4iz-1})} dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

↳ 解は $z = (-2 \pm \sqrt{3}i)$ 　部分分数に分ける。

report Ⅱ

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

御利益

つる亀算→方程式

~~(2)~~ ない! $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2\cos\theta}{17-8\cos\theta}\,d\theta$

〆切、来週の月曜日.

~~(3)~~ (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}$

$(|a|<1)$

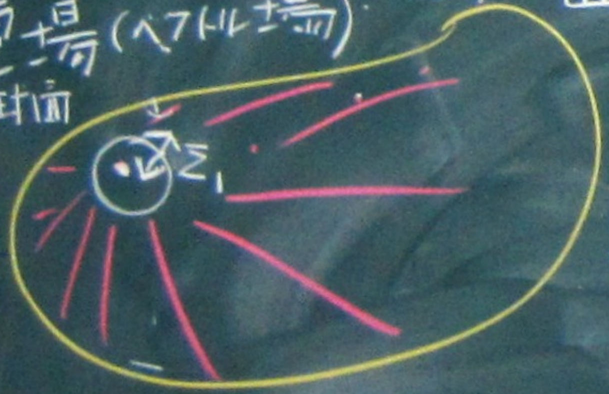
複素積分

Gaussの法則　空間(3次元)

点電荷

電場(ベクトル場)　閉曲面 $\Sigma$

球面




$\Omega$

$\Sigma$で囲まれる領域

定義されていない特異点

面の向き

Gaussの発散定理

$\mathrm{div}\,\mathbb{f} = 0$

$$\int_\Sigma \mathbb{f}\cdot d\mathbb{S} = \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbb{f}\; dV$$

面積分　算数

$\Sigma \cup \Sigma_1$

$$\int_{\Sigma\cup\Sigma_1} \mathbb{f}\, d\mathbb{S} = 0$$

$$\int_\Sigma \mathbb{f}\cdot d\mathbb{S} - \int_{\Sigma_1} \mathbb{f}\cdot d\mathbb{S} = 0$$

平行　$\gamma$: 閉曲線

複素平面 (2次元)　$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Stokesの定理

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

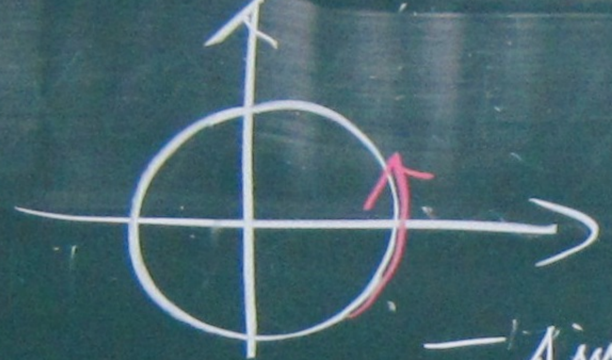
解析関数

面積分

線積分

$$f(z) = z^2 + 2z + 1$$

$f(z)=\frac{1}{z}$



0：特異点

$-\sin\theta+i\cos\theta=\frac{dz}{d\theta}\,d\theta$

$\gamma:\ |z|=1$　　単位円

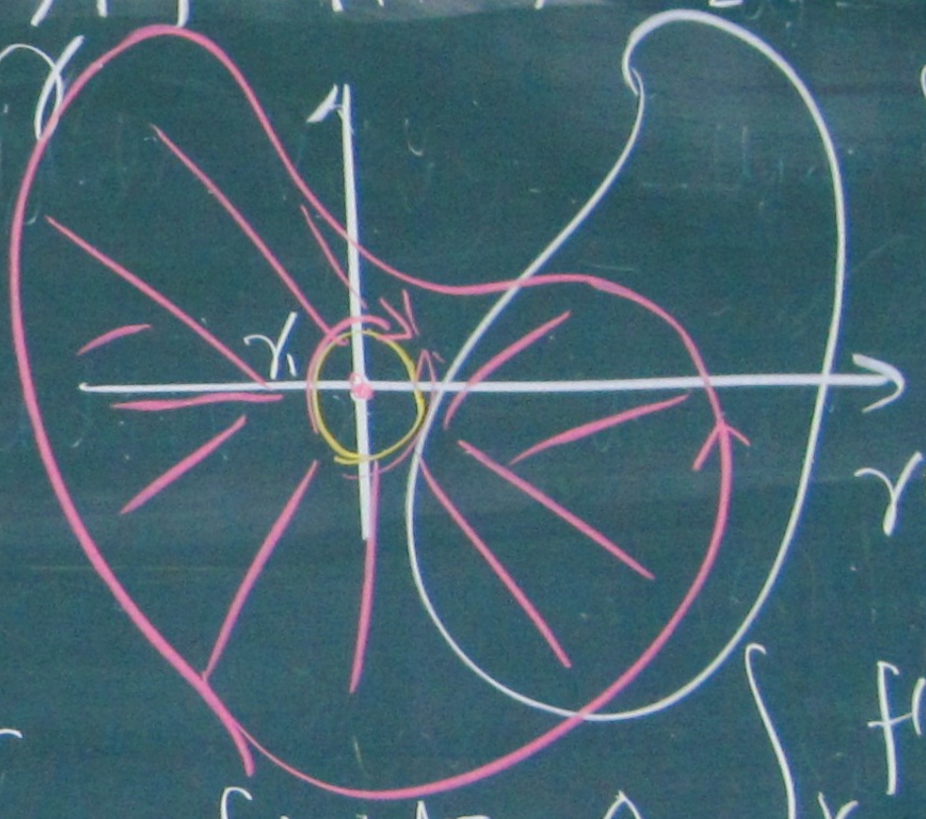
$z=\cos\theta+i\sin\theta$

左側に内部をみる

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}(-\sin\theta+i\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} i\,d\theta=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i$$

任意の閉曲線　$f(z)=\frac{1}{z}$




$\int_\gamma \frac{1}{z}dz=0$

$\gamma\cup\gamma_1$

$$\int_{\gamma\cup\gamma_1} f(z)\,dz=0$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

$=2\pi i$

$a \in \mathbb{C}$

$f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ $\gamma$: 閉曲線

$a, b \in \mathbb{C}$

$f(z)$ $\dfrac{b}{z-a}$

aが特異点

$\int_\gamma f(z)dz = 0$ (aが外部)

$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i$ (aが内部)

$2\pi i b$ $n \in \mathbb{Z}$

$f(z) = z^n$

$n \neq -1$

$F(z) = \dfrac{1}{n+1} z^{n+1}$ $f(z)$の

原始関数

$\gamma$ 任意の曲線 $[a, b] \to \mathbb{C}$

$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

$\gamma$: $|z| = 2$ 円

$\int_\gamma \dfrac{1}{z^2(z-1)} dz$

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{t_1}{z-1}+\frac{t_2}{z}+\frac{t_3}{z^2}$$

部分分数に分ける

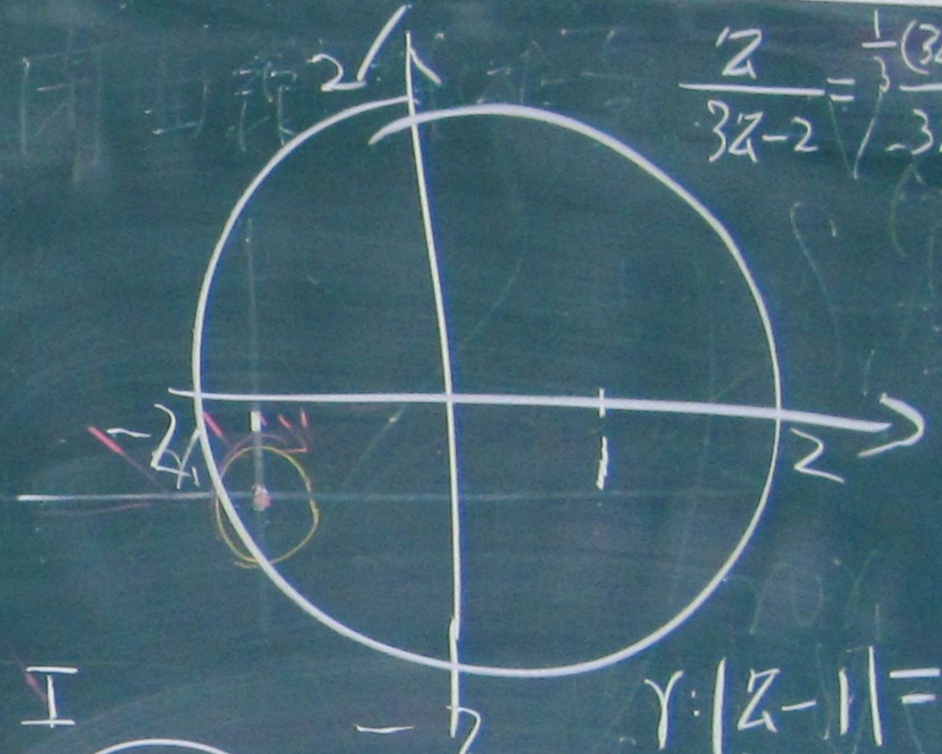
$$=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\underbrace{\int_\gamma\frac{dz}{z-1}}_{2\pi i}-\underbrace{\int_\gamma\frac{dz}{z}}_{2\pi i}-\underbrace{\int_\gamma\frac{dz}{z^2}}_{0}$$

$$=2\pi i$$

$$=0$$

$$\frac{z}{3z-2}=\frac{\frac{1}{3}(3z-2)+0}{3z-2}$$




$\gamma: |z-1|=\frac{1}{2}$

report I

I (1) $\frac{z}{3z-2}$ (2) $\frac{1}{z^2-3z+2}$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos\theta}{2+\sin\theta}\, d\theta}$$

$$z = e^{i\theta} = \underline{\cos\theta + i\sin\theta}$$

$$\frac{1}{z} = \bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$+)\quad z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{dz}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta = iz$$

$$d\theta = \frac{1}{iz}\,dz$$

$$1+\cos\theta = 1 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+2z+1}{2z}$$

$$2+\sin\theta = 2 + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+4iz-1}{2iz}$$

$\gamma$は単位円

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos\theta}{2+\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$= \int_\gamma \frac{z^2+2z+1}{z(z^2+4iz-1)}\,dz$$

$$z = (-2 \pm \sqrt{3})i$$

report II

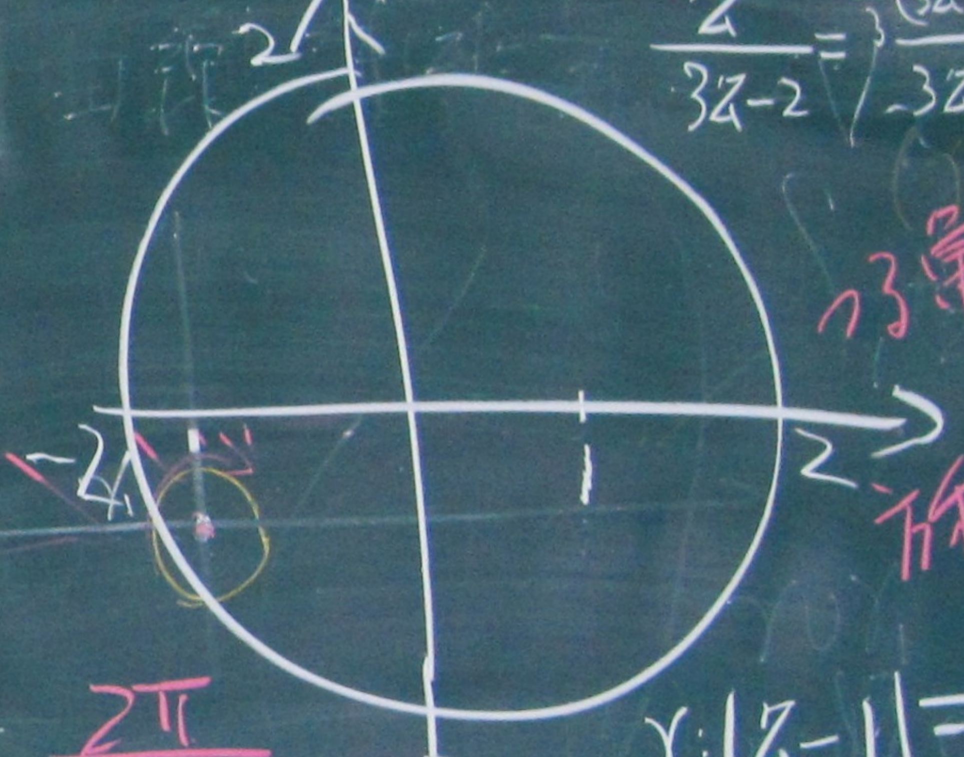
御利益

$$(1)\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$$

$$(2)\ \int_0^{2\pi} \frac{2\cos\theta}{17-8\cos\theta}\,d\theta$$

$$(3)\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

$$(|a|<1)$$




$$\frac{z}{3z-2} = \frac{\frac{1}{3}(3z-2)+0}{3z-2}$$

方程式

つる亀算

$$\gamma : |z-1| = \frac{1}{2}$$

(2)

$$\frac{1}{z^2-3z+2}$$