2/8

$$f : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{複素数}}}{\overset{\mathbb{R}^2}{\mathbb{C}}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

積が入っているのが大きなちがい

$z = x + iy$, $d \in \mathcal{D}$

$w = u + iv$

$f'(z)$と書くことにしましょう

$$f(z + wd) = f(z) + \underset{\substack{\text{ただ1個の} \\ \text{複素数}}}{?}\, wd \quad (\forall w \in \mathbb{C},\ \forall d \in \mathcal{D})$$

fはzで微分可能（解析的, analytitial）

$\boxed{f\text{が}z\text{で解析的} \iff z\text{で Cauchy-Rieman の方程式が成り立つ}}$

定理 $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

(1) fとgがzで解析的 $\Rightarrow$ $f+g$はzで解析的で,

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$$

(2) fがzで解析的で, $\alpha \in \mathbb{C}$ ならば,

αfはzで解析的で,

$$(\alpha f)'(z) = \alpha f'(z)$$

(3) fとgがzで解析的ならば, fgもzで解析的で,

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

2/8

(4) fとgがzで解析的で $g(z) \neq 0$ ならば

$\dfrac{f}{g}$ が z で解析的で、

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)}$$

証明

(1) $(f+g)(z+wd) = f(z+wd) + g(z+wd)$

$= f(z) + f'(z)wd + g(z) + g'(z)wd$

$= f(z) + g(z) + (f'(z) + g'(z))wd$

$= (f+g)(z) + \underbrace{(f'(z) + g'(z))}_{}wd$

└微分形数ここにあり

(2) $(\alpha f)(z+wd) = \alpha f(z+wd)$

$= \alpha \{ f(z) + f'(z)wd \}$

$= \underbrace{\alpha f(z)}_{} + \underbrace{\alpha f'(z)}_{} wd$

↳ $(\alpha f)(z)$　　└微分係数

(3), (4) → レポートI　〆切 2/13

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ z \in \mathbb{C} \longmapsto c \in \mathbb{C} \\ \quad f(z) = c \end{array}\right\} \text{のとき}$$

$$\begin{array}{rl} & f(z+wd) = c \\ -) & \underline{\quad f(z) \quad = c} \\ & \quad 0 = 0wd \end{array}$$

$$f'(z) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} (2)\ z \in \mathbb{C} \longmapsto z \\ \quad f(z) = z \end{array}\right\} \text{のとき}$$

$$f(z+wd) - f(z) =$$
$$\cancel{z} + wd - \cancel{z}$$
$$= 1wd = wd$$
$$f'(z) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} (3)\ z \in C \longmapsto z^2 \\ \quad f(z) = z \end{array}\right\} \text{のとき}$$

$$(ff)'(z) = f'(z)f(z) + f(z)f'(z)$$
$$= 1z + z1$$
$$= 2z$$

(4) $z \in \mathbb{C} \longmapsto z^n$ （解析的）（nは自然数）

$$f(z) = z^n$$
$$f'(z) = nz^{n-1}$$

2/8

(5) $z \in \mathbb{C} \longmapsto z^{-n}$

$f(z) = z^{-n}$

$f \neq 0$ で f は analytic で

$f'(z) = -n z^{-n+1}$

(4), (5) $\longmapsto$ report II

$(f+g)' = f' + g'$, $(\alpha f)' = \alpha f'$

$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots$

$(e^z)' = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \cdots = e^z$

微分形式

ベクトル解析 $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$ 上の微分形式（複素平面）

0次の微分形式　スカラー関数 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1次の微分形式　$\omega = f dx + g dy$　$(f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R})$

2次の微分形式　$\omega = f dx \wedge dy$　$(f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R})$

— 0次の微分形式を微分すると，—

$$d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy \quad \left(\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

— 1次の微分形式を微分すると —

$$\omega = f\,dx + g\,dy$$

$$d\omega = (f_x \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + f_y\, dy \wedge dx) + (g_x\, dx \wedge dy + g_y \underbrace{dy \wedge dy}_{=0})$$

$$= (-f_y + g_x)\, dx \wedge dy$$

微分形式の積分

点(x, y)で0次の微分形式φを積分すると，

$$\varphi(x, y)$$

1次の微分形式の場合，

曲線 $\gamma : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}^2$ 線積分

$$\int_\gamma \omega$$

2次の微分形式の場合 面積分

Σ

$$\int_\Sigma \omega$$

Stokesの定理が成り立つ

0次の微分形式 φ

曲線$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\int_\gamma d\varphi = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

2/8

1次の微分形式 ω

閉曲線 γ で囲まれる領域 Σ があったとすると

$$\int_\Sigma d\omega = \int_\gamma \omega$$

保存力　1次の微分形式 ω を考える

0次の微分形式 φ によって、

$\omega = d\varphi$ と書けていたとすると、

$$\int_{\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_2}\omega$$

閉曲線 γ に対して、$(\gamma(b) = \gamma(a))$

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma d\varphi$$
$$= \varphi(\gamma(b) - \gamma(a)) \quad (\text{Stokes})$$
$$= 0$$

(道に依らない、始点と終点だけで決まる)

$d\omega = 0$ かどうかを見てやればよい

ω が任意の閉曲線について
$$\int_\gamma \omega = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{d\omega = 0}$$

$\Leftrightarrow$

0次の微分形式 φ があって、$\omega = d\varphi$

必要十分

複素関数の微積分

$f = \overset{実部}{u} + i\overset{虚部}{v}$

$u, v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$

曲線 $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$　　$z = x + iy$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u + iv)\, d(x + iy)$$

$$= \int_\gamma \{ u\,dx + ui\,dy + iv\,dx - v\,dy \}$$

$$= \underbrace{\int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i \int_\gamma (u\,dy + v\,dx)}_{\mathbb{R}^2\text{上の線積分}}$$

γがもしも閉曲線 → 0になってほしい

$$d(u\,dx - v\,dy) = -u_y\,dx \wedge dy - v_x\,dx \wedge dy$$

$$d(u\,dy + v\,dx) = u_x\,dx \wedge dy - v_y\,dx \wedge dy$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{u_y = -v_x} \\ \boxed{u_x = v_y} \end{array}\right\} \text{Cauthy-Rieman の方程式}$$

$$f : \overset{\mathbb{R}^2}{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$$

複素数

積　$d \in D$　$(\forall w \in \mathbb{C})$

$z = x + iy$　$(\forall d \in D)$

$w = u + iv$

$$f(z + wd) = f(z) + ?\,wd$$

ただ1個の複素数

$f'(z)$と書くことにしましょう

fはzで微分可能(解析的)

analytic

---

fがzで解析的

$\Updownarrow$

zで

Cauchy-Riemannの

方程式が成立つ

定理　$f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

(1) fとgがzで解析的 $\Rightarrow$ $f+g$はzで解析的で $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$

(2) fがzで解析的で $\alpha \in \mathbb{C}$ ならば αfはzで解析的で $(\alpha f)'(z) = \alpha f'(z)$

(3) fとgがzで解析的ならば fgもzで解析的で $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

(4) fとgがzで解析的で $g(z) \neq 0$ ならば f/gがzで — で $(f/g)'(z)$ は $\dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$

証明

(1) $(f+g)(z+wd)$

$= f(z+wd)+g(z+wd)$

$= f(z)+f'(z)wd+g(z)+g'(z)wd$

$= f(z)+g(z)+\underline{(f'(z)+g'(z))\,wd}$

$= (f+g)(z)+\underline{\qquad\qquad}$

(2) $(\alpha f)(z+wd)$

$= \alpha f(z+wd)$

$= \alpha\{f(z)+f'(z)wd\}$

$= \underbrace{\alpha f(z)}_{(\alpha f)(z)}+\underline{\alpha f'(z)}wd$

来週の月

I (3) &(4) report

(1) $z \in \mathbb{C} \mapsto c \in \mathbb{C}$

$f(z) = c$

$f(z+wd) = c$

$-)\ f(z) = c$

$0 = 0wd$

$f'(z) = 0$

(2) $z \in \mathbb{C} \mapsto z$

$f(z) = z$

$f(z+wd) - f(z) =$

$\cancel{z} + wd - \cancel{z}$

$= wd = 1wd$

$f'(z) = 1$

(3) $z \in \mathbb{C} \mapsto z^2$

$f(z) = z$

$(ff)' = f'(z)f(z) + f(z)f'(z)$

$(z^2)' = 1z + z1$

$= 2z$

nは自然数

report II 証明

(4) $z \in \mathbb{C} \mapsto z^n$ 解析的で

$(f(z) = z^n)$

$f'(z) = nz^{n-1}$

(5) $z \in \mathbb{C} \mapsto z^{-n}$ $f(z) = z^{-n}$

$z \neq 0$ で f は analytic で

$f'(z) = -nz^{-n+1}$

$(f+g)' = f' + g'$

$(\alpha f)' = \alpha f'$

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots$$

$$(e^z)' = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = e^z$$

微分形式

ベクトル解析 $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$ 上の

0次の微分形式

1次の微分形式

2次の微分形式

スカラー関数 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\omega = f\,dx + g\,dy \quad (f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

$\omega = f\,dx \wedge dy \quad (f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

— 0次の微分形式を微分すると —

$d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy$

$\left(\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$

1次の微分形式を微分すると

$\omega = f\,dx + g\,dy$

$d\omega = (f_x\, dx \wedge dx + f_y\, dy \wedge dx) + (g_x\, dx \wedge dy + g_y\, dy \wedge dy)$

$= (-f_y + g_x)\, dx \wedge dy$

$\boxed{\text{微分形式の積分}}$

点 (x, y) で 0次の微分形式 φ を積分すると

$\varphi(x, y)$

Σ

1次の微分形式

曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$

ω

$\int_\gamma \omega$

線積分

2次の微分形式

$\int_\Sigma \omega$

面積分

Stokesの定理

0次の微分形式 φ

曲線 $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\int_\gamma d\varphi = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

1次の微分形式 ω

閉曲線 γ で囲まれる

領域 Σ があったとすると

$$\int_\Sigma d\omega = \int_\gamma \omega$$

保存力 / $\boxed{\text{1次の微分形式 } \omega}$

0次の微分形式 φ によって

$$\omega = d\varphi$$

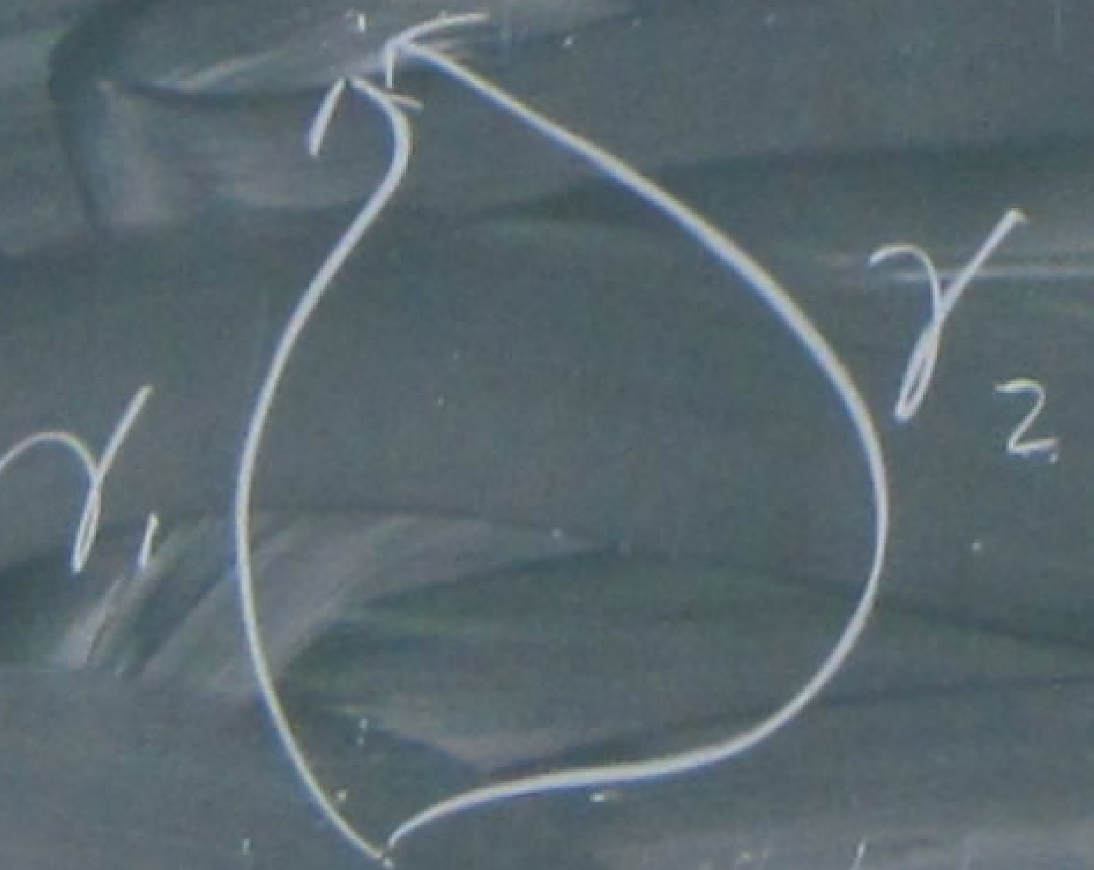
閉曲線 γ　$\gamma(b) = \gamma(a)$

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma d\varphi$$

Stokes

$$= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

$$= 0$$



$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

道によらない
(始点と終点だけで決まる)

$\boxed{\text{0次の微分形式 } \varphi \text{ があって } \omega = d\varphi}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\omega \text{ が任意の閉曲線について } \int_\gamma \omega = 0}$

$\Updownarrow$

$\boxed{d\omega = 0}$

必要十分

複素関数の微積分

$f = \overset{\text{実部}}{u} + i\overset{\text{虚部}}{v}$

$u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$z = x + iy$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u + iv)\, d(x + iy)$$

$$= \int_\gamma \{ u\,dx + iu\,dy + iv\,dx - v\,dy \}$$

$$= \underbrace{\int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i \int_\gamma (u\,dy + v\,dx)}_{\mathbb{R}^2 \text{上の線積分}}$$

γ がもしも閉曲線

$$d(u\,dx - v\,dy) = -u_y\,dx \wedge dy - v_x\,dx \wedge dy$$
$$= 0$$

$$\boxed{u_y = -v_x}$$

$$d(u\,dy + v\,dx) = u_x\,dx \wedge dy - v_y\,dx \wedge dy$$
$$= 0$$

Cauchy–Riemann の方程式 $\boxed{u_x = v_y}$