複素関数の微分

$\mathbb{C}$ 複素数

$Z = x + iy$

実部 x
虚部 y } 実数

今まで $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ への関数だったが、
$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ への関数を考える。

$\mathbb{C}$ $z = x + iy$
$\shortparallel$
$\mathbb{R}^2$ (x, y)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

微分

(x, y)

$$f((x, y) + \cancel{(a, b)} (a, b) d) - f(x, y) = \underbrace{df(x, y)}_{\text{線型写像}} (a, b) d$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

2×2の 行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} d$$

$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ の違いは？

$\mathbb{C}$ は、**積** が次のようになる。

$z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$a+bi \in \mathbb{C} \longmapsto$

$$(\alpha+i\beta)(a+bi) = (\alpha a-\beta b)+i(\alpha b+\beta a)$$

$(\alpha+i\beta) \in \mathbb{C}$

行列 $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$f((x+iy)+(a+bi)d)-f(x+iy)$$
$$=(\alpha+i\beta)(a+bi)d$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x} \end{aligned}\right\}$$

(仏) コーシー (独) リーマン
Cauchy - Riemann の方程式

Cauchy - Riemann の方程式を満たすような $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の関数を解析関数と言う。

@ $z \longmapsto c$ (複素数) 定数関数

$f(z)=c$ 解析関数

@ $z \longmapsto z$ $f_1(x,y)=x$

$f_2(x,y)=y$

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x}=1=\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$ $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}=0=\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$ 解析関数

定理

(1) fもgも解析関数ならば $f+g$ も解析関数

(2) fが解析関数で

$c \in \mathbb{C}$ならば cfも解析関数

(3) fもgも解析関数ならば fg も解析関数

(4) fもgも解析関数で、$g \neq 0$ ならば

$\dfrac{f}{g}$も解析関数

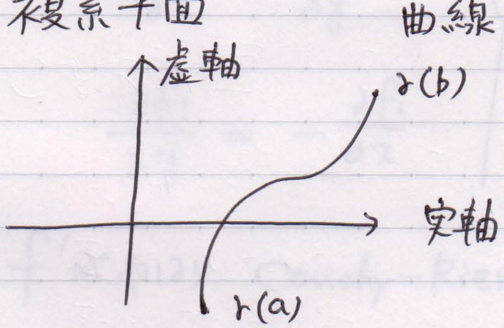
証明

Cauchy-Riemannの方程式を確認 (report問題2)

提出は来週の月よう日.

積分

複素平面



$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$

線積分

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \underbrace{f_1(z) + if_2(z)}_{(dx + idy)}$$

$$\left(\begin{array}{l} f(z) = f_1(z) + if_2(z) \\ z = x + iy \end{array} \right)$$

$$= \int_\gamma \{ f_1(z)dx - f_2(z)dy \}$$

$$+ i\int_\gamma \{ f_1(z)dy + f_2(z)dx \}$$

$$= \int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,dt$$

$$- \int_a^b f_2(\gamma(t)\gamma_2'(t)\,dt$$

$$+ i\int_a^b f_1(\gamma(t)\gamma_2'(t)\,dt + i\int_a^b f_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,dt$$

先程の定理より

$$z \mapsto c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0$$

多項式が解析関数であることがわかる。

fが解析関数　α, βは実数

$$f((x+iy)+(a+ib)d) - f(x+iy)$$
$$= (\alpha + i\beta)(a+ib)d$$

$$\alpha = \frac{\partial f_1}{\partial x} \qquad \beta = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$\alpha + i\beta$のことをfの$x+iy$における微分係数と言う。

$$f'(x+iy)$$
$$\parallel$$
$$f'(z)$$

<u>定理</u>

Fという解析関数がある。

$$F' = f$$

曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

線積分

（複素関数論における微積分学の基本定理）

左辺 $= \int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,dt - \int_a^b f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)\,dt$

$+ i\int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma_2'(t)\,dt + i\int_a^b f_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,dt$

これに高校でやった微積分学の基本定理を使って下さい

（report問題Ⅱ）

定理

f が解析関数ならば f' も解析関数

$f = f_1 + if_2$

$$f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial y}$$

Cauchy − Riemann

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{Cauchy−Rimann}$$

f' がやはり Cauchy−Riemann の公式を満たしていることを確認

（report問題Ⅲ）

$f' = g = g_1 + ig_2$

複素関数の微分

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

$\mathbb{C}$ 複素数

$z = x + iy$

実部 x
虚部 y
実数

$z = x + iy\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(x, y)\ \mathbb{R}^2$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

微分

(x, y)

$f((x, y) + (a, b)d) - f(x, y)$

$= \underline{df(x, y)}(a, b)\, d$

線型写像

2×2の行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} d$$

$i^2 = -1$

積

$z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$a+bi \longmapsto$

&

$(\alpha+i\beta)(a+bi)$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ & $\mathbb{C}$

$= (\alpha a - \beta b) + i(\alpha b + \beta a)$

行列 $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

$f((x+iy)+(a+bi)d) - f(x+iy)$

$= \underline{(\alpha+i\beta)}(a+bi)d$

$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

Cauchy-Riemann の方程式

コーシー (仏)

リーマン (独)

Cauchy-Riemannの方程式を満たすような $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ の関数を解析関数と言う

$z \mapsto c$（複素数） 定数関数

$f(z)=c$ 解析関数

$z \mapsto z$

$f_1(x,y)=x$

$f_2(x,y)=y$

解析関数

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

定理

(1) f も g も解析関数ならば $f+g$

(2) f が解析関数で $c \in \mathbb{C}$ ならば

来週の月

report問題

I

(3) f も g も解析関数ならば fg ＿＿

(4) f も g も＿＿で $g \neq 0$

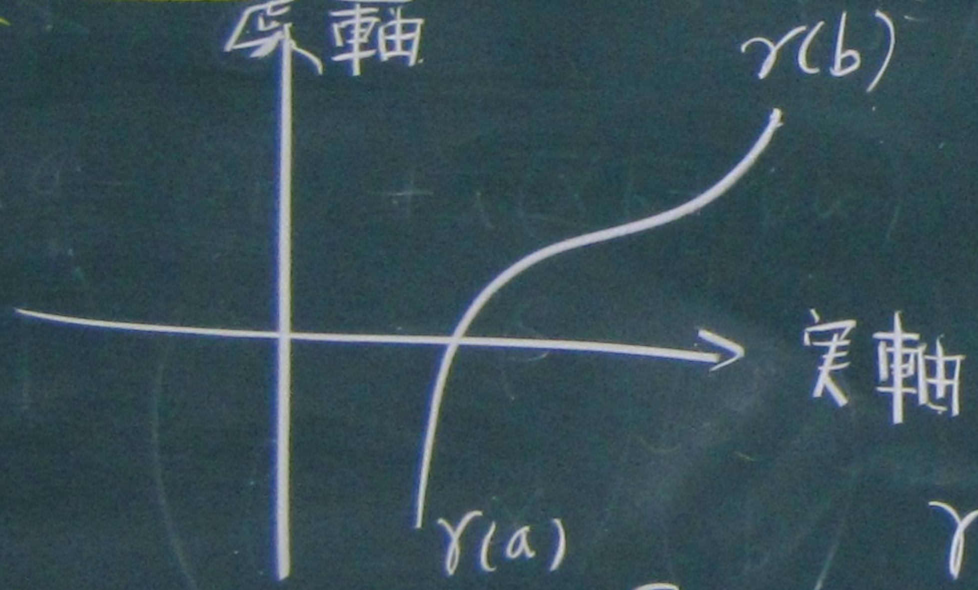
$\frac{f}{g}$ も解析関数

証明

Cauchy-Riemannの方程式を確認

積分

複素平面



$$\gamma : \underset{\substack{\cup \\ t}}{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{C}$$

曲線 $f(z)$

線積分

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (f_1(z) + i f_2(z))(dx + i\,dy)$$

(独)

$$f(z) = f_1(z) + i f_2(z)$$

$$= \int_\gamma \{f_1(z)\,dx - f_2(z)\,dy\} + i\int_\gamma \{f_1(z)\,dy + f_2(z)\,dx\}$$

$$z = x + iy$$

$$= \int_a^b f_1(\gamma(t))\,\gamma_1'(t)\,dt - \int_a^b f_2(\gamma(t))\,\gamma_2'(t)\,dt$$

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$$

$$+ i\int_a^b f_1(\gamma(t))\,\gamma_2'(t)\,dt + i\int_a^b f_2(\gamma(t))\,\gamma_1'(t)\,dt$$

fが解析関数　　α, βは実数

$f = f_1 + i f_2$

$$f((x+iy)+(a+ib)d) - f(x+iy)$$

$$= (\alpha + i\beta)(a+ib)d$$

$$\alpha = \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

$$\beta = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$\alpha + i\beta$のことを
fの微分係数と言う

$f'(x+iy)$　　$x+iy$における

$f'(z)$

定理（複素関数論における微積分学の基本定理）

Fという解析関数

$$F' = f$$

曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz \underset{\text{II}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

線積分

$$\text{左辺} = \int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,dt - \int_a^b f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)\,dt + i\int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma_2'(t)\,dt + i\int_a^b f_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,dt$$

←これに高校でやった微積分学の基本定理を使ってください

定理
fが解析関数
ならば f' も——
$f=f_1+if_2$

$$\boxed{f'(z)=\frac{\partial f_1}{\partial x}+i\frac{\partial f_2}{\partial y}}$$

Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=\frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=-\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Cauchy-Riemann

f'がやはり ___

Cauchy-Riemannの公式を
満たしていることを確認

$f'=g=g_1+ig_2$

$g_1=$