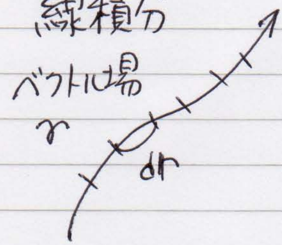
# ベクトル解析

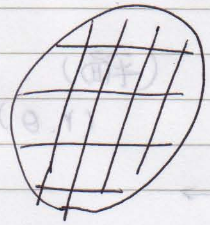
線積分




$\int_{r} \mathbb{f}\cdot d\mathbb{r}$

面積分

曲面Σ



$\iint_{\Sigma} \mathbb{f}\cdot d\mathbb{S}$

体積分

Gaussの発散定理

閉曲面Σで囲まれた領域Ω

$\mathbb{f}$：ベクトル場

$$\underbrace{\iint_{\Sigma} \mathbb{f}\cdot d\mathbb{S}}_{\text{面積分}} = \underbrace{\int_{\Omega} \mathrm{div}\,\mathbb{f}\, dv}_{\text{体積分}}$$

具体的にいきましょう

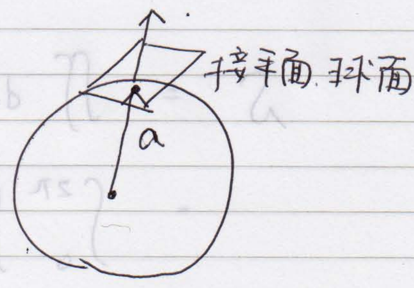
Σ：原点中心、半径 $a$ の球面

Ω　〃　球

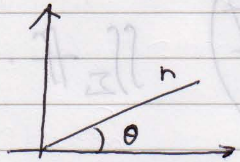
右辺 $= \underbrace{3\int_{\Omega} dv}$ 球の体積

$= 4\pi a^3$

左辺 $=$ 球の表面積 $\underset{\text{ただの掛け算}}{\times}$ $a$

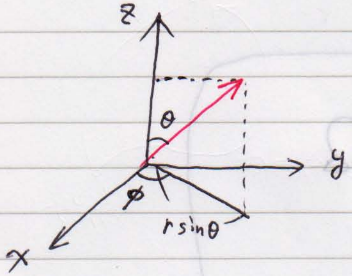


# 球面の表面積の計算
## 空間の極座標




(平面)

$(r, \theta)$ [redacted]




$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$x = r\sin\theta\cos\phi$

$y = r\sin\theta\sin\phi$

$z = r\cos\theta$

原点中心、半径 $a$ } 球面 $r = a$

$\mathbf{r}_\theta = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$ ベクトル

$\mathbf{r}_\phi = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}$ ベクトル

$\mathbf{r}_\theta d\theta \underset{\text{ベクトル積}}{\times} \mathbf{r}_\phi d\phi = (\mathbf{r}_\theta + \mathbf{r}_\phi) d\theta\, d\phi$

$S = \iint dS$

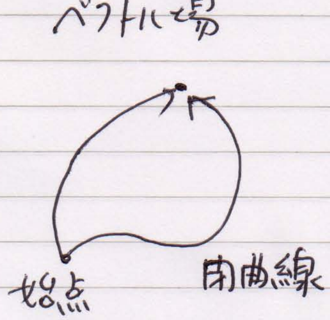
$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi| \, d\theta\, d\phi$

$\mathbb{F}$ が保存力 $\xleftrightarrow{\text{必要十分}}$ あるスカラー場 $\varphi$ に対して

$$\mathbb{F} = \mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\downarrow \quad \uparrow \text{ 逆がいえるか？}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{F} = 0$$




スカラー場 $\varphi$

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{F} = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)$$

定理

閉曲線 $\gamma$ に対してそれを縁とするような曲面 $\Sigma$ が存在する

物理的証明

針金をセッケン水が入ったバケツに入れると膜ができる

Stokes の定理

$$\boxed{\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Sigma} \mathrm{rot}\,\mathbb{F} \cdot d\mathbf{S}}$$

$$|\mathbf{r}| = r$$

$$\mathbf{r} \mapsto \cancel{\frac{\mathbf{r}}{r}}\ \mathbf{r} r^{\alpha} \qquad \mathbf{r} = (x, y, z)$$

(α: 実数)

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

↑ 位置ベクトル

↑ 力のベクトル

$$(x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha}{2}}$$

発散

宿題II

このベクトル場の発散を計算する。

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\text{成分}) + \frac{\partial}{\partial y}(y\text{成分}) + \frac{\partial}{\partial z}(z\text{成分})$$

の計算.

これがちょうど消える場合がある。

↓

$$\alpha = -3$$

Gaussの法則を来週やる

ベクトル解析

線積分

ベクトル場 $\mathbf{f}$

曲線

$\gamma$

$d\mathbf{r}$

$$\int_\gamma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$$

閉曲線

面積分

曲面 $\Sigma$

平ら

垂直

$$\int_\Sigma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$$

## Gaussの発散定理

閉曲面 $\Sigma$ で囲まれた領域 $\Omega$

$\mathbf{f}$ : ベクトル場

$$\underbrace{\int_\Sigma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}}_{\text{面積分}} = \underbrace{\int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{f}\, dV}_{\text{体積分}}$$

具体例にいきましょう

Σ：原点中心
半径 $a$ の
球面

Ω：＿＿＿＿
＿＿＿＿
球

ベクトル場 $\mathbb{r}$ : $(x, y, z) \to (x, y, z)$
点　ベクトル

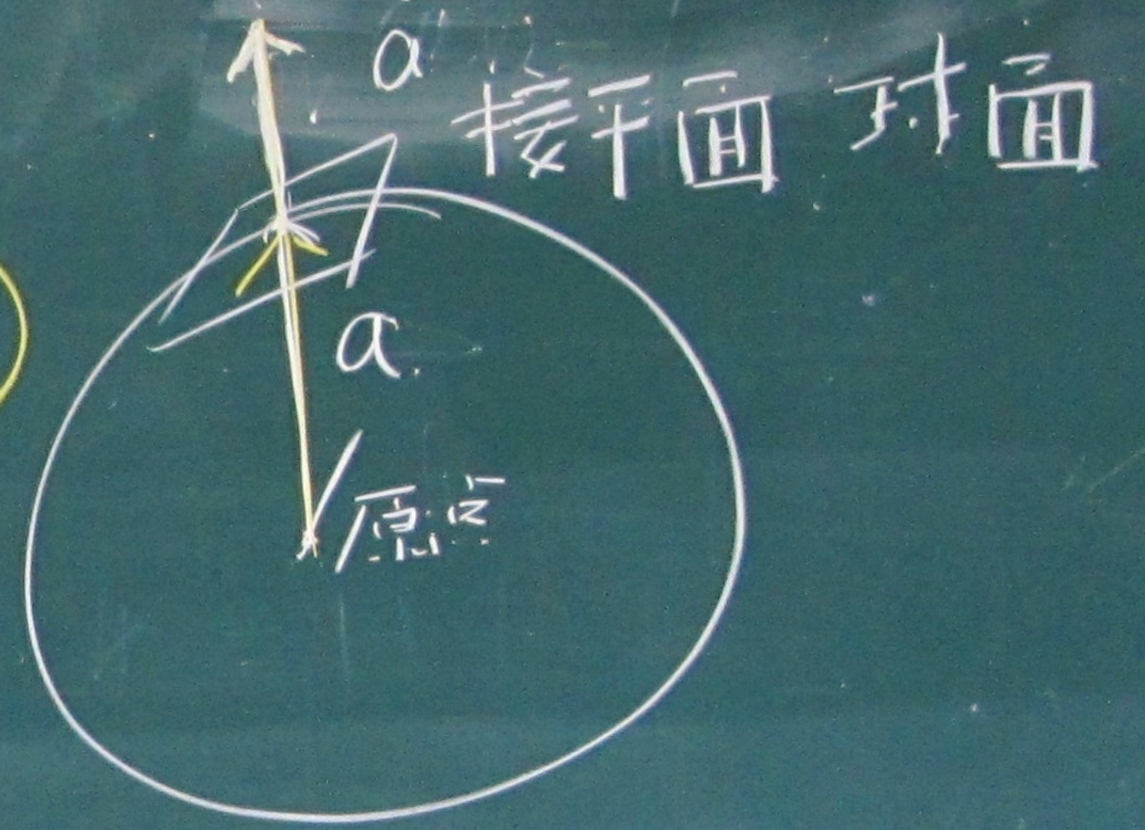
$\mathrm{div}\,\mathbb{r} = 3$

右辺 $= 3 \underbrace{\int_{\Omega} dV}_{\text{球の体積}}$　$\dfrac{4}{3}\pi a^3$

$= 4\pi a^3$

左辺 $= \underbrace{\text{球の表面積}}$ $\times$ $a$

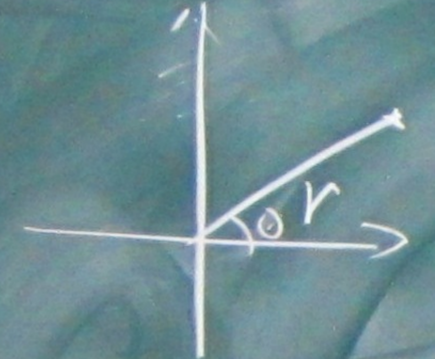
ただの掛算



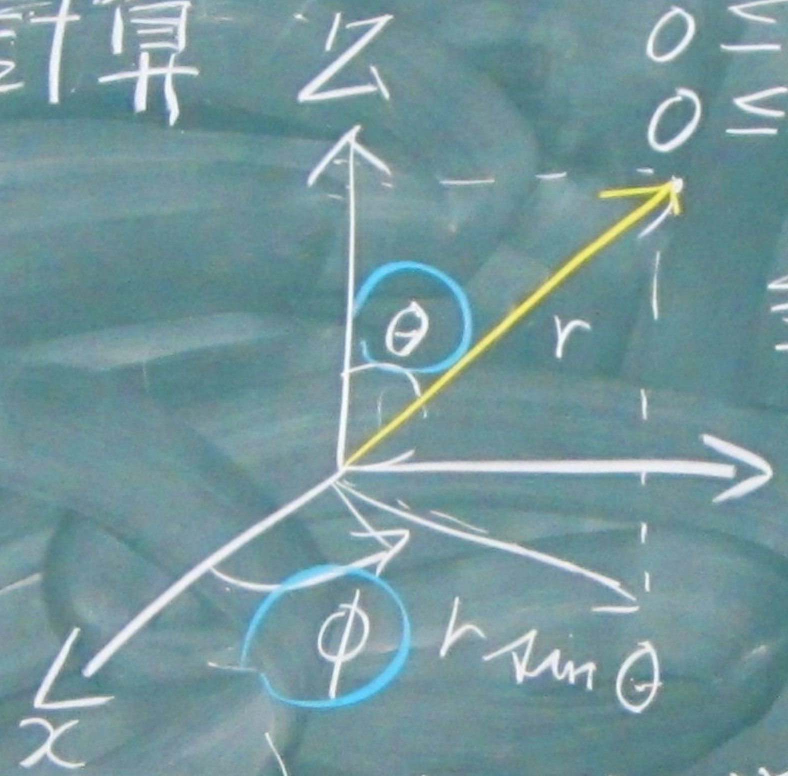
## 球面の表面積の計算

空間の極座標

平面




$(r, \theta)$




$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le \phi \le 2\pi$

垂直

原点中心に
半径 a
球面 $r=a$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$$ ベクトル

$$\mathbf{r}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}$$ ベクトル

$$S = \iint dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi|\, d\theta\, d\phi$$

$$\mathbf{r}_\theta d\theta \times \mathbf{r}_\phi d\phi = \underline{(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)}\, d\theta\, d\phi$$

ベクトル積

$\mathbb{F}$ が保存力 $\Longleftrightarrow$ あるスカラー場 $\varphi$ に対して $\mathbb{F} = \mathrm{grad}\,\varphi$

ベクトル場 $\mathbb{F}$　　[illegible] スカラー場 $\varphi$

$\mathbb{F} = \mathrm{grad}\,\varphi$

$\mathrm{rot}\,\mathbb{F} = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)$

$\mathrm{rot}\,\mathbb{F} = 0$


閉曲線

物理的証明

定理

ふち
縁

閉曲線 $\gamma$ に対して
それを縁とするような
曲[illegible]存在する

Stokesの定理

$$\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_{\Sigma} \mathrm{rot}\,\mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}$$

αは実定数

$\mathbb{r} \mapsto \mathbb{r}\, r^{\alpha}$

↑

位置ベクトル

力のベクトル

発散

$|\mathbb{r}| = r$

$\mathbb{r} = (x, y, z)$

$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$

$(x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha}{2}}$

宿題Ⅱ

$\frac{\partial}{\partial x}$ (x成分) + $\frac{\partial}{\partial y}$ (y成分) + $\frac{\partial}{\partial z}$ (z成分)

[illegible]える　$\alpha = -3$

Gaussの法則