Date 2011.12.21

微分形式の積分

1次の微分形式 (⟷ ベクトル場)

$$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

$(f, g, h \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$

曲線 $\gamma : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}^3$

parameter

$$\int_\gamma \omega = \int_{a_1}^{a_2} \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \{ f(\gamma(t))\,dx(\gamma'(t)) + g(\gamma(t))\,dy(\gamma'(t)) + h(\gamma(t))\,dz(\gamma'(t)) \}\,dt$$

$$dx : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x \quad dy : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y \quad dz : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \qquad \gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \gamma_3' \end{pmatrix}$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \{ f(\gamma(t))\gamma_1'(t) + g(\gamma(t))\gamma_2'(t) + h(\gamma(t))\gamma_3'(t) \}\,dt.$$

$$f e_1 + g e_2 + h e_3 \qquad \begin{pmatrix} f(\gamma(t)) \\ g(\gamma(t)) \\ h(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \gamma_3'(t) \end{pmatrix} dt$$

内積

仕事
線積分

曲線の向きは大切

2次の微分形式

$$\omega = f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy$$

$$(f.\ g.\ h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$$

曲面

$$\Sigma : [a_1 . a_2] \times [b_1 . b_2] \to \mathbb{R}^3$$

$$\overset{\Psi}{(u.v)}$$

$$\int_\Sigma \omega = \int_{b_1}^{b_2} \Big\{ \int_{a_1}^{a_2} \Big\{ f(\Sigma(u.v))\,dy \wedge dz \Big(\frac{\partial \Sigma}{\partial u}(u.v), \frac{\partial \Sigma}{\partial v}(u.v) \Big)$$

$$+ g(\Sigma(u.v))\,dz \wedge dx \Big(\frac{\partial \Sigma}{\partial u}(u.v), \frac{\partial \Sigma}{\partial v}(u.v) \Big)$$

$$+ h(\Sigma(u.v)\,dx \wedge dy \Big(\frac{\partial \Sigma}{\partial u}(u.v). \frac{\partial \Sigma}{\partial v}(u.v) \Big) \Big\} du \Big\} dv$$

$$\Sigma(u.v) = \begin{pmatrix} \Sigma_1(u.v) \\ \Sigma_2(u.v) \\ \Sigma_3(u.v) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \Sigma}{\partial u}(u.v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}(u.v) \\ \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u}(u.v) \\ \frac{\partial \Sigma_3}{\partial u}(u.v) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial v}(u.v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v}(u.v) \\ \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v}(u.v) \\ \frac{\partial \Sigma_3}{\partial v}(u.v) \end{pmatrix}$$

$$dy \wedge dz\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$dz \wedge dx\left(\quad , \quad \right) = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$dx \wedge dy\left(\quad , \quad \right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\int_\Sigma w = \int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2}\left\{ f(\Sigma(u,v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \right.$$

$$+ g(\Sigma(u,v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Sigma_3}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$$

$$\left. + h(\Sigma(u,v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \right\} du\,dv$$

$$w = f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy$$ 2次の微分形式

$\Updownarrow$ 対応

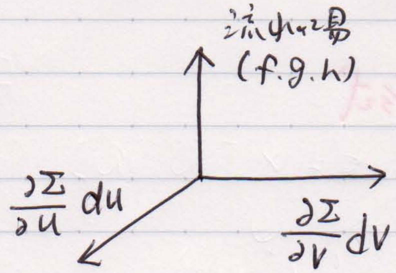
$$f\mathbb{e}_1 + g\mathbb{e}_2 + h\mathbb{e}_3$$

ベクトル場（流れの場）

水の

内積(スカラー積)　　　　外積(ベクトル積)

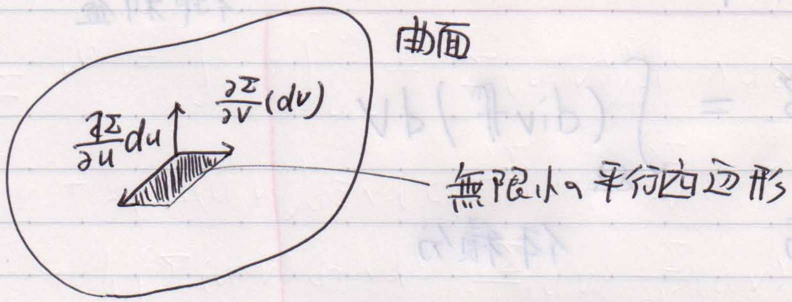
$$\begin{pmatrix} f(\Sigma(u,v)) \\ g(\Sigma(u,v)) \\ h(\Sigma(u,v)) \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_3}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} du \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} dv \right\}$$



行列式

$$\mathbb{a} \cdot (\mathbb{b} \times \mathbb{c}) = |\mathbb{a}\ \mathbb{b}\ \mathbb{c}|$$

平行六面体の体積

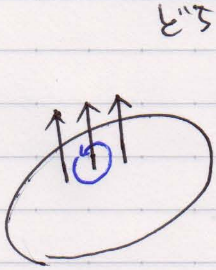


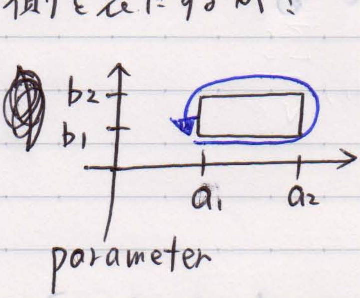
曲線　向きが大切

曲面　向き

風呂敷

どちら側を表にするか?





$w = f\, dx \wedge dy \wedge dz$　　3次の微分形式

$\updownarrow$

f　スカラー場

領域 Ω

$\int_\Omega w$　直方体

$\iiint_\Omega w$

一般化　微積分の基本定理

$\downarrow$

Stokesの定理

閉曲面 Σ に囲まれた領域 …… 外側を表とする。

2次の微分形式 ω

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Omega \underline{d\omega}$$

3次の微分形式

微分形式論

⇓

ベクトル解析

御利益

$$\boxed{\int_\Sigma \mathbb{f}\cdot d\mathbb{S} = \int_\Omega (\mathrm{div}\,\mathbb{f})\,dV}$$

面積分　　体積分

Gaussの発散定理

使い方

$\mathbb{f} = \mathbb{r}$ ベクトル場

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

点　　ベクトル

$$\mathrm{div}\,\mathbb{r} = \nabla\cdot\mathbb{r} = 1+1+1 = 3$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

微分形式の積分

1次の微分形式 ⟷ ベクトル場

$$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

$(f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$

曲線 $\gamma : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}^3$

parameter

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \qquad \gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \gamma_3' \end{pmatrix}$$

$$\int_\gamma \omega = \int_{a_1}^{a_2} \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt$$

$dx : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x \quad dy : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y$

$dz : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \left\{ f(\gamma(t))\,dx(\gamma'(t)) + g(\gamma(t))\,dy(\gamma'(t)) + h(\gamma(t))\,dz(\gamma'(t)) \right\} dt$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \left\{ f(\gamma(t))\gamma_1'(t) + g(\gamma(t))\gamma_2'(t) + h(\gamma(t))\gamma_3'(t) \right\} dt$$

$$f\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3 \qquad \begin{pmatrix} f(\gamma(t)) \\ g(\gamma(t)) \\ h(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \gamma_3'(t) \end{pmatrix} dt$$

内積

仕事

線積分

力学

2次の微分形式

$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \Sigma_1(u,v) \\ \Sigma_2(u,v) \\ \Sigma_3(u,v) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \Sigma}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_3}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \Sigma}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\omega = f\, dy \wedge dz + g\, dz \wedge dx + h\, dx \wedge dy$$

$$(f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$$

曲面

$$\Sigma : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\rotatebox{90}{$\in$}$$

$$(u, v)$$

二重積分

$$\int_\Sigma \omega = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} \Big\{ f(\Sigma(u,v))\, dy \wedge dz \Big(\frac{\partial \Sigma}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \Sigma}{\partial v}(u,v) \Big) + g(\Sigma(u,v))\, dz \wedge dx \Big(\frac{\partial \Sigma}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \Sigma}{\partial v}(u,v) \Big)$$

$$+ h(\Sigma(u,v))\, dx \wedge dy \Big(\frac{\partial \Sigma}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \Sigma}{\partial v}(u,v) \cdots dv$$

$$dy \wedge dz\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$dz \wedge dx \left(\quad , \quad \right) = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$dx \wedge dy \left(\quad , \quad \right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\int_\Sigma \omega = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} \left\{ f(\Sigma(u,v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} + g(\Sigma(u,v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Sigma_3}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} + h(\Sigma(u,v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Sigma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Sigma_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \right\} du\, dv$$

2次の微分形式

$$\omega = f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$$

↕ 対応

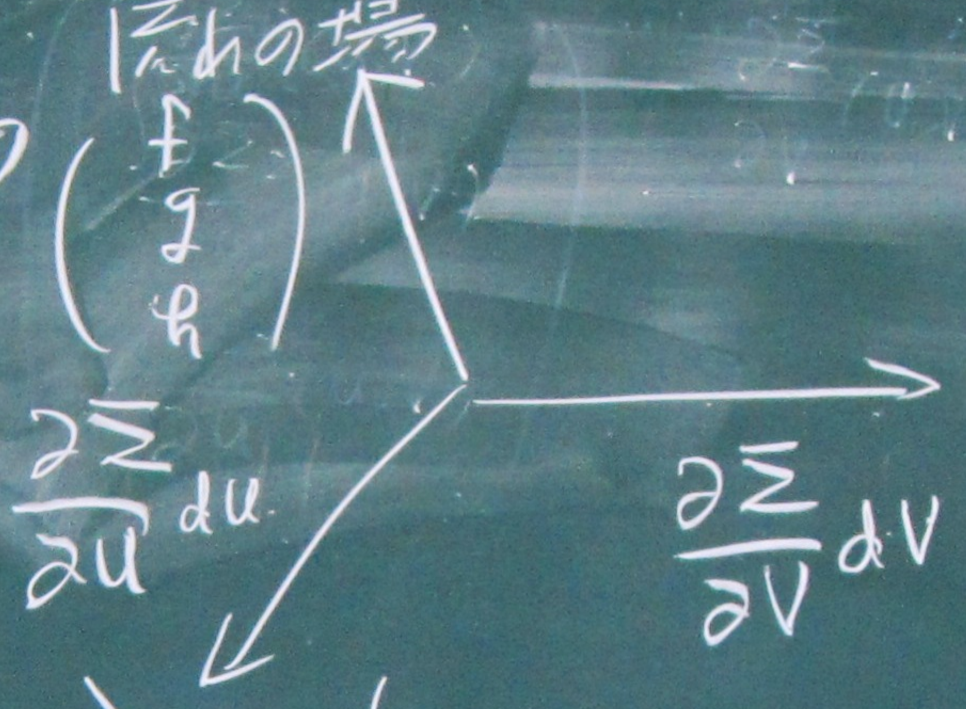
$$f\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3$$

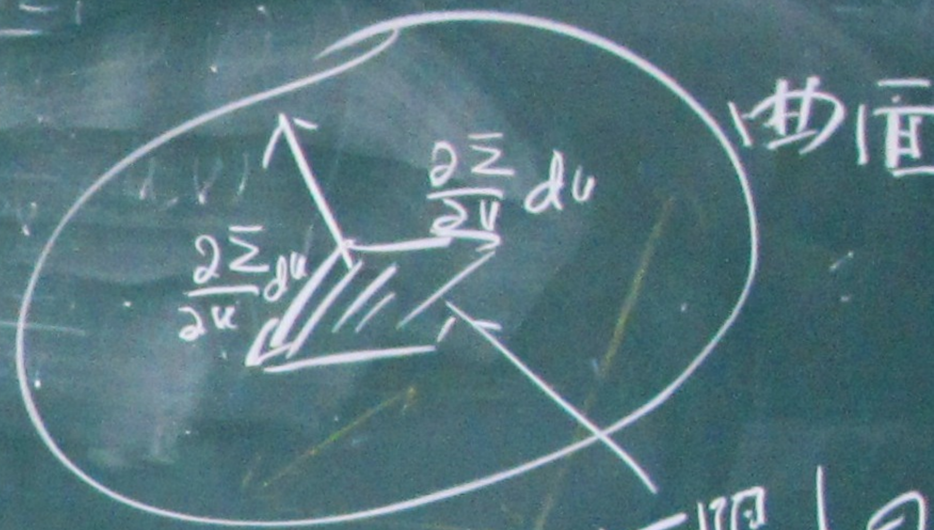
ベクトル場（流れの場）

水の

平行六面体の体積

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = |\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}|$$





無限小の平行四辺形

単位時間

$$\left.\begin{pmatrix} f(\Sigma(u,v)) \\ g(\Sigma(u,v)) \\ h(\Sigma(u,v)) \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial\Sigma_1}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial\Sigma_2}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial\Sigma_3}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} du \times \begin{pmatrix} \frac{\partial\Sigma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\Sigma_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\Sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} dv\right)\right\}\ \text{行列式}$$

内積（スカラー積）

ベクトル積（外積）

曲線 向き

曲面 向き

風呂敷

表

外側を表

$\omega = f\,dx \wedge dy \wedge dz$

3次の微分形式 ω

$\updownarrow$

f

閉曲面に囲まれた領域 Ω

$\int_{\Omega} \omega$

直方体

スカラー場

$\iiint_{\Omega} f$

pare

b

分の基本定理 $\xrightarrow{\text{一般化}}$ Stokesの定理

微分形式 ω

微分形式論
⇓
ベクトル解析

御利益
使い方

$$\int_{\Sigma} \mathbb{f} \cdot d\mathbb{S} = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbb{f})\, dV$$

面積分　　体積分

Gauss の発散定理

$\mathbb{f} = \mathbb{k}$　ベクトル場

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

点　　ベクトル

$\operatorname{div} \mathbb{k} = \nabla \cdot \mathbb{k} = 1+1+1 = 3$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} =$$