Date 2011 · 12 · 14

（古典的な）ベクトル解析

$\uparrow\downarrow$ 辞書

微分形式

$$\nabla \times (\nabla f)$$

ナブラ

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

I
(a) スカラー場 φ

$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\varphi) = 0$

まじめに計算する。

(b) ベクトル場 $\mathbb{f}$

$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbb{f}) = 0$

積分

$\mathbb{f}$ ベクトル場（力の場）

曲線 $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$
（空間）

$\int_{\varphi} \mathbb{f} \cdot d\mathbb{r}$ 仕事の総量

$\varphi'(t)\,dt$

$$\int_a^b \mathbb{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

線積分という。

レポート〆切り 1/10

No.

Date

ベクトル場　$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f\\g\\h \end{pmatrix} = f\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3$$

$h, g, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\updownarrow$$

1次の微分形式　$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$

$$\int_\varphi \omega$$

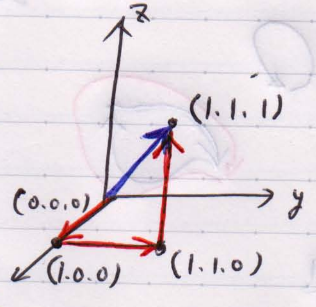
II

$$\mathbf{f} = x^2\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + xyz\mathbf{e}_3$$

$f(x, y, z) = x^2$

$g(x, y, z) = y$

$h(x, y, z) = xyz$



線積分を計算する　(a) 直通

(b) 回り道　の2通りのやり方で、

微積分学の基本定理

f　スカラー場

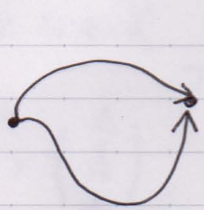
φ: 曲線 $[a, b] \to \mathbb{R}^3$

$$\int_\varphi df = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$$

$$\boxed{\int_\varphi (\mathrm{grad}\, f)\cdot d\mathbf{r} = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))}$$

力の場 $\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$ という形で与えられているとすると、

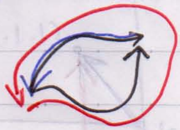
$\boxed{\qquad\qquad}$ が成り立つ。



こういう力を 保存力 と言う。

仕事の量が始点と終点にだけ依存し、途中の経路によらない

$\mathbb{F}$が保存力 $\overset{\text{必要十分}}{\Longleftrightarrow}$ loopに沿って1周回ると仕事は0



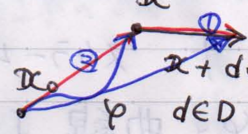
命題

$\mathbb{F}$が保存力であればスカラー場fがあって

$\mathbb{F} = \operatorname{grad} f$ と書ける。

証明

まずfを見つける必要がある

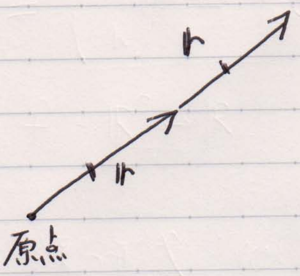


$f(x) = \int_\varphi \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$

$\underbrace{f(x + de_1)}_{①} - \underbrace{f(x)}_{②} = \mathbb{F} \cdot de_1 = (\mathbb{F} \cdot e_1)d$

III

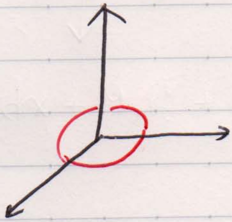
ベクトル場 $\mathbb{r}$



$$\int_C \mathbb{f} \cdot d\mathbb{r} \quad (=0)$$

を計算する。

$x^2+y^2=a^2 \quad z=0$



$\mathbb{f}$ が保存力

$\Leftrightarrow \mathrm{rot}\, \mathbb{f} = 0$

$\rightarrow$

$$\mathbb{f} = \mathrm{grad}\, f$$

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = 0$$

月 D701 エピ一室

(古典的な)ベクトル解析

↑↓ 辞書 見通し

微分形式

$$\overset{ナブラ}{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla) f$$

I (a) スカラー場 φ

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\ \varphi) = 0$$

(b) ベクトル場 $\mathbb{f}$

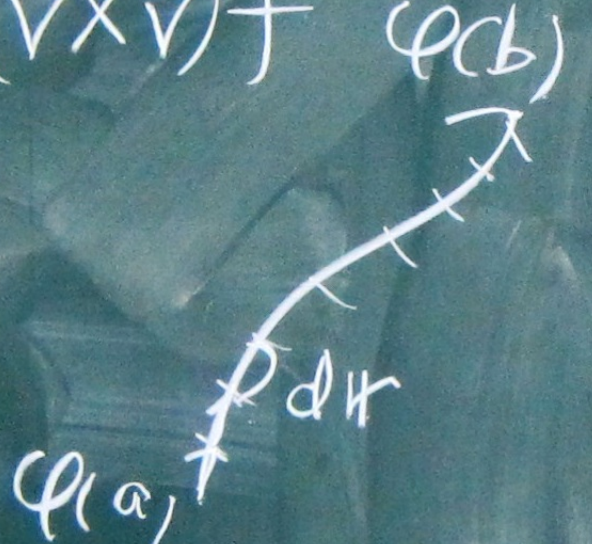
$$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\ \mathbb{f}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{f}) = |\nabla\ \nabla\ \mathbb{f}|$$

積分

$\mathbb{f}$ ベクトル場 (力の場)

曲線 $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (空間)



$$\int_\varphi \mathbb{f} \cdot d\mathbb{r}$$

仕事の総量

$$\varphi'(t)\,dt$$

$$\int_a^b \mathbb{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

ベクトル場

$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix}f\\g\\h\end{pmatrix} = f\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3$$

$$\updownarrow$$

$h, g, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

1次の微分形式

$$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

$$\int_\gamma \omega$$

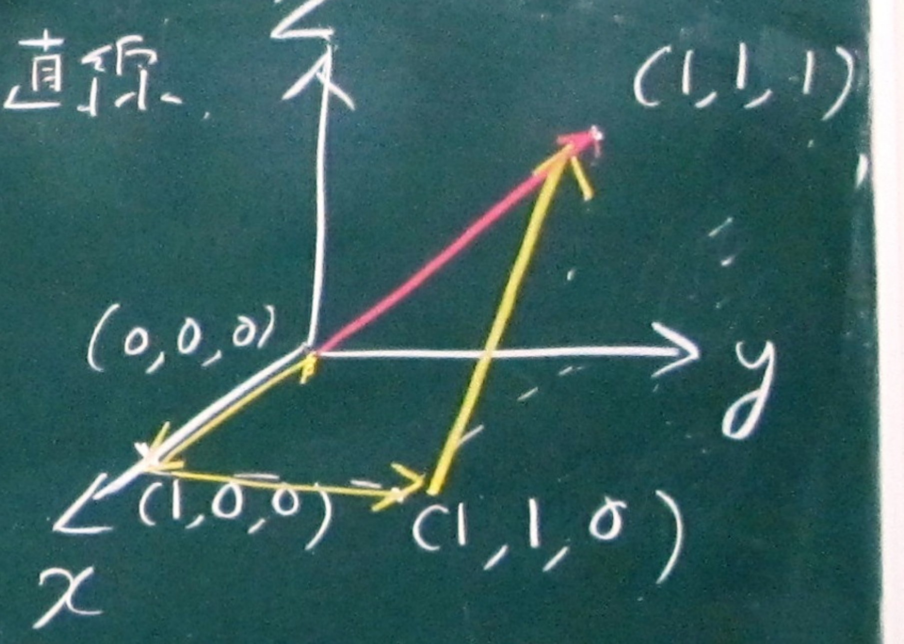
II

$$\mathbf{f} = x^2\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + xyz\,\mathbf{e}_3$$

$f(x,y,z) = x^2$

$g(x,y,z) = y$

$h(x,y,z) = xyz$



線積分

(a) 直通

(b) 回り道

微積分学の基本定理 一般化

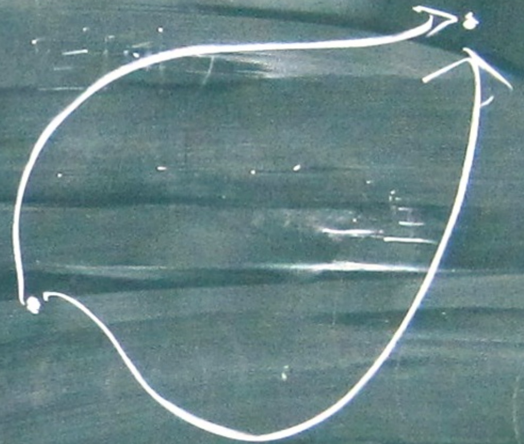
f スカラー場

φ: 曲線 $[a,b] \to \mathbb{R}^3$

$$\int_\varphi df = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$$

$$\boxed{\int_\varphi (\operatorname{grad} f)\cdot d\mathbf{r} = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))}$$

力の場が $\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$ の形で与えられていたとする



保存力

仕事の量が始点と終点にだけ依存し途中の経路によらない。

$\mathbb{f}$ が保存力 $\overset{\text{必要}}{\underset{\text{十分}}{\Longleftrightarrow}}$

loop に沿って
1周回ると
仕事は0

命題
$\mathbb{f}$ が保存力であれば スカラー場 f があって
$\mathbb{f} = \mathrm{grad}\, f$ と書ける

証明

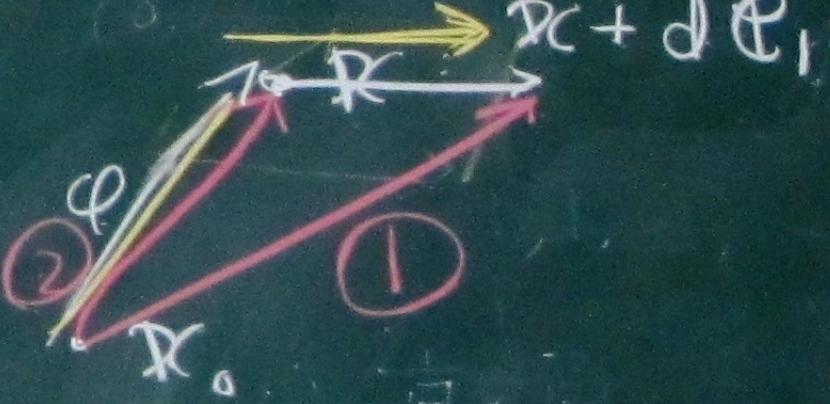
まず f を見つける必要がある

$$f(x) = \int_{\varphi} \mathbb{f} \cdot d\mathbb{r}$$

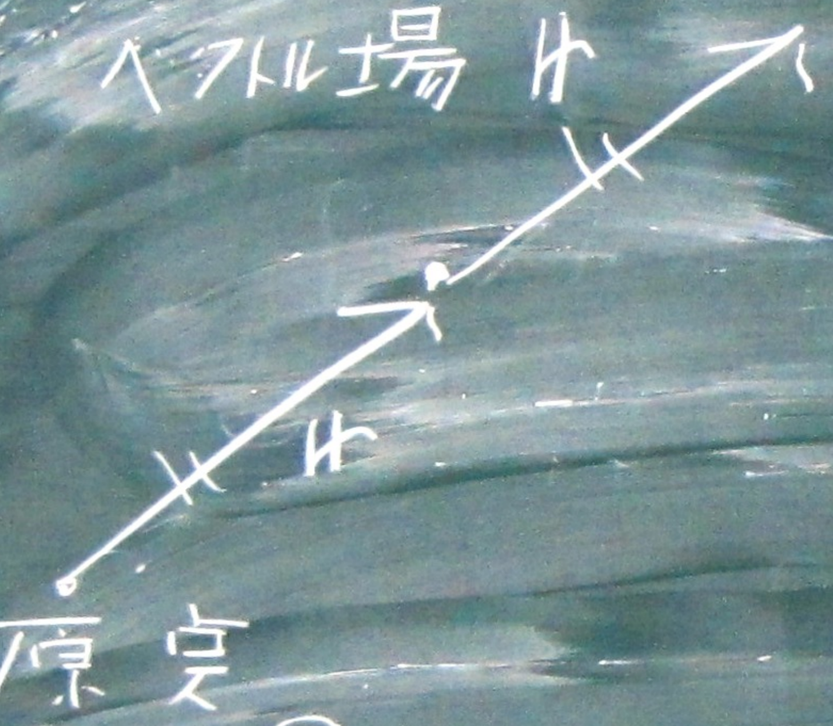
$$\underbrace{f(x + d\mathbb{e}_1)}_{①} - \underbrace{f(x)}_{②} = \mathbb{f} \cdot d\mathbb{e}_1 = (\mathbb{f} \cdot \mathbb{e}_1) d$$

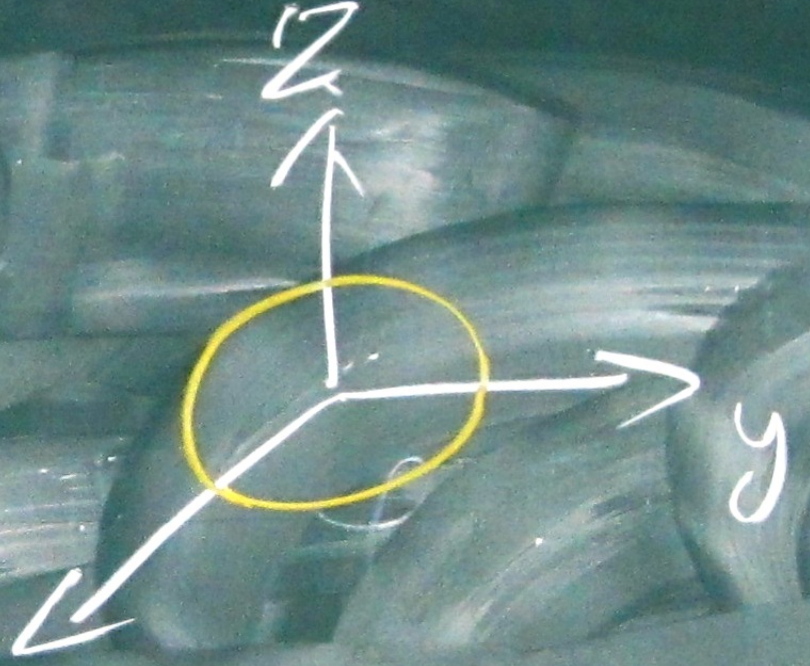
$\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d \in D$



III ベクトル場 $\mathbb{r}$





力の場

$$\int_{\varphi} \mathbb{f} \cdot d\mathbb{r} \; (=0) \quad \mathbb{f}\text{が保存力} \Longleftrightarrow \mathrm{rot}\, \mathbb{f} = 0$$

$$\mathbb{f} = \mathrm{grad}\, f$$

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = 0$$

$x^2 + y^2 = a^2 \quad z = 0$