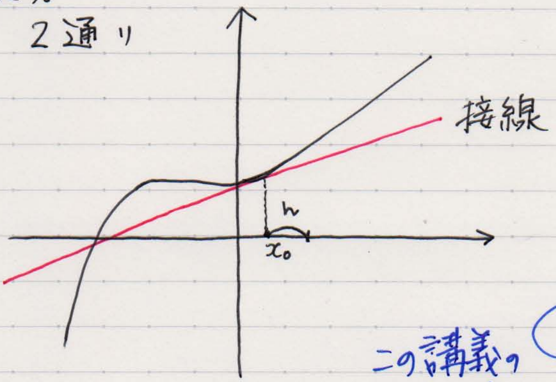
微積分　～2コマ目～

微分

2通り



● 19c以降（高校の standard）

$h \to 0$ の時

曲線はどんどん接線に近づく。

しかし一般には接線にはならない。

● 17c & 18c

この講義の考え方

十分hが小さくなると曲線は接線に一致する

report 課題

提出期限：来週の月曜

場所：自然　D705

（数学の事務室）

レポート受けへ提出する

I　$(\alpha f)' = \alpha f'$　α は実数

を17c、18cの考え方で証明する

II　$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$　（$g \neq 0$ の時）

を17c、18cの考え方で証明する

$$\frac{f(x+d)}{g(x+d)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+d)g(x) - f(x)g(x+d)}{g(x+d)g(x)}$$

参

$$\left(\begin{aligned} f(x+d) &= f(x) + f'(x)d \\ g(x+d) &= g(x) + g'(x)d \\ (a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}\right)$$

$g(x) - g'(x)d$ を分母と分子にかける

↳ "$g(x)^2 - g'(x)^2 \underline{d^2}$" が出てくる。

すると d が消える

↓ αd という形になる

合成関数の微分

数III

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

微分は…

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

証明

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

分母と分子に $f(x+h) - f(x)$ をかける

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\left(\begin{array}{l} f(x+h) - f(x) = H \quad \text{とおく。} \\ f(x+h) = f(x) + H \end{array} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{H \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} = \lim_{H \to 0} \frac{g(f(x) + H) - g(f(x))}{H} = g'(f(x))$$

怪し~~気~~げな証明

分母が0になってしまうのではないか?

$d \in D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$

$g(f(x+d)) - g(f(x))$

$= g(f(x) + \underbrace{f'(x)}_{\alpha} d) - g(f(x))$

$\Big($ $d \in D$ & $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha d \in D$ $\because (\alpha d)^2 = \alpha^2 \underbrace{d^2}_{=0} = 0$

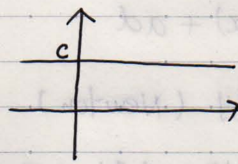
$d_1 \in D,\ d_2 \in D \not\Rightarrow d_1 + d_2 \in D$

$\because\ (d_1 + d_2)^2 = \underbrace{d_1^2}_{=0} + \underbrace{d_2^2}_{=0} + \underbrace{2 d_1 d_2}$ これは0になるとは言いきれない $\Big)$

$f'(x) d = d'$ として計算　　$\Leftarrow f(x+d) = f(x) + f'(x) d$

$= \cancel{g(f(x))} + g'(f(x)) \underbrace{f'(x) d}_{d'} - \cancel{g(f(x))}$

具体的な関数の微分



■ 定値関数　$f(x) = c$

$f(x+d) - f(x) = c - c = 0$

$= 0d$

したがって、$f'(x) = 0$

■ $f(x) = x$

$f(\cancel{x}\, x + d) - f(x) = (x + d) - x = d$

$= 1 \cdot d$

したがって $f'(x) = 1$

■ $f(x) = x^2$

$f(x+d) - f(x) = (x+d)^2 - x^2 = \cancel{x^2} + 2xd + \underbrace{d^2}_{=0} - \cancel{x^2}$

$= 2x \cdot d$

したがって $f'(x) = 2x$

■ $f(x) = x^n$ （ n は 自然数 ）

$$f(x+d) - f(x)$$

$\boxed{\text{2項定理}}$

$$= (x+d)^n - x^n$$

$$= (\cancel{x^n} + n x^{n-1} d + \cdots d^2 + \cdots d^3 + \cdots) - \cancel{x^n}$$

$$= n x^{n-1} d$$

したがって $f'(x) = n x^{n-1}$

■ 三角関数

微分は、 $f(x+d) - f(x) = ad$ （ $^\forall d \in D$ ）となるような a が唯一つ決まる

$$f(x+d) = f(x) + ad$$

慣性の法則（Newton）

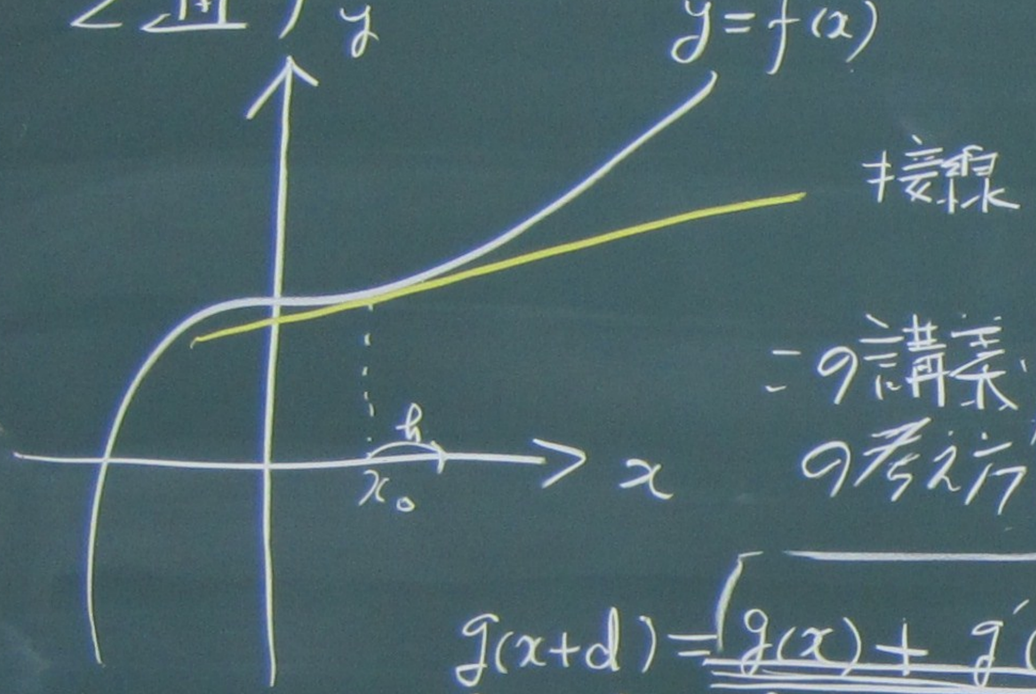
無限小の慣性の法則（西村）

力がかかっても、経過時間が非常に小さい間は 直線運動をする

角度　　360度　　radian

微分

2通り



この講義の考え方

19C以降(高校のstandard)

$h\to 0$ の時

曲線はどんどん接線に近づく

しかし一般には接線にはならない

17C&18C

十分 h が小さくなると曲線は接線に一致する

$g(x+d) = \boxed{g(x) + g'(x)d}$

$f(x+d) = f(x) + f'(x)d$

$$\frac{f(x+d)}{g(x+d)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+d)g(x) - f(x)g(x+d)}{g(x+d)g(x)} = \alpha d$$

$g(x) - g'(x)d$ を分母と分子にかける

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$g(x)^2 - g'(x)^2 d^2$

$(fg)' = f'g + fg'$ (Leibnizの公式)

report 来週の月曜 自然 D705 (数学の事務室)

I $(\alpha f)' = \alpha f'$ αは実数

II $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ ($g \neq 0$ の時)

合成関数の微分

数III

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)}$　$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

証明

$f(x+h) - f(x) = H \to 0$

$f(x+h) = f(x) + H$

分母と分子に $f(x+h) - f(x)$ をかける

$\lim_{h \to 0} \dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\lim_{H \to 0} \dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)}$

$= \lim_{H \to 0} \dfrac{g(f(x) + H) - g(f(x))}{H} = g'($

怪しげな
証明

$$d \in D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$$

$$g(f(x+d)) - g(f(x))$$

$$= g(f(x) + \underbrace{f'(x)d}_{d'}) - g(f(x))$$

$$f'(x)d = d'$$

$$= \cancel{g(f(x))} + \underbrace{g'(f(x))\, f'(x)\, d}_{d'} - \cancel{g(f(x))}$$

$d \in D$ & $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha d \in D$

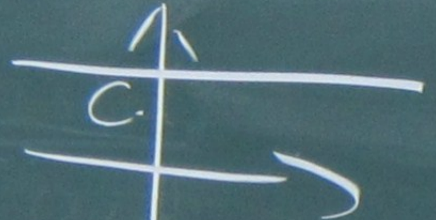
$$(\alpha d)^2 = \alpha^2 \underbrace{d^2}_{0} = 0$$

$$d_1 \in D \quad d_2 \in D \not\Rightarrow d_1 + d_2 \in D$$

$$(d_1 + d_2)^2 = \underbrace{d_1^2}_{=0} + \underbrace{d_2^2}_{=0} + 2 d_1 d_2$$

具体的な関数の微分

定値関数 $f(x) = C$



$$f(x+d) - f(x) = C - C = 0$$

$$= 0d$$

$$f'(x) = 0$$

OCW

$$f(x+d) = f(x) + f'(x)d$$

$$f(x) = x$$

$$f(x+d) - f(x) = (\cancel{x} + d) - \cancel{x} \qquad f'(x) = 1$$

$$= d = 1d$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x+d) - f(x) = (x+d)^2 - x^2$$

$$= \cancel{x^2} + 2xd + \underbrace{d^2}_{=0} - \cancel{x^2} \qquad f'(x) = 2x$$

2項定理 $(f+g)'=f'+g'$ $(\alpha f)'=\alpha f'$

$f(x)=x^n$ (nは自然数)

三角関数 $f(x)$ とおく

$f(x+d)-f(x)$

$=\underline{(x+d)^n}-x^n$

$=\cancel{x^n}+nx^{n-1}d-\cancel{x^n}$

$=\underline{nx^{n-1}}d$ $f'(x)=nx^{n-1}$

$f(x+d)-f(x)=ad$ $(\forall d\in D)$

となるような a が唯1つ決まる

$f(x+d)=\underline{f(x)}+a\underline{d}$

慣性の法則 (Newton)

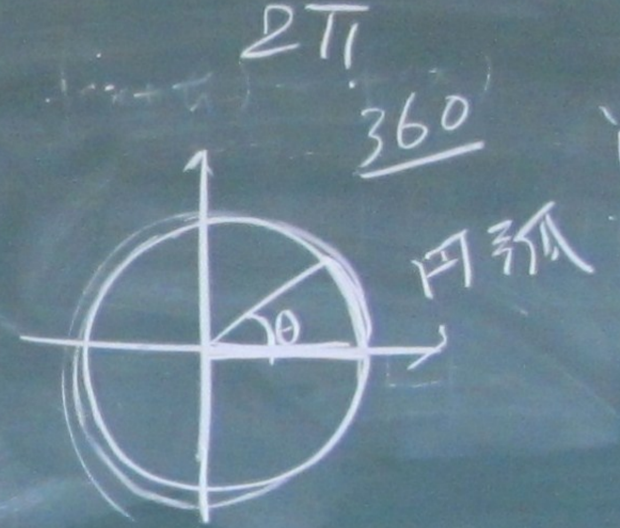
~~無~~限小の_______ (西村)

角度 度 $\underline{360度}$

radian

10

e



単位円

半径が 1

inch

距

m

cm

km