

## ベクトル解析

スカラー

ベクトル

微分形式

空間 1次元

3次元

0次の交代形式はスカラーと同じ

標準基底  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 

1次の交代形式

 $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  $dx$   $dy$   $dz$  : 基底 $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$  $\omega = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz$ スカラー  $x_1, x_2, x_3$  が unique に決まる $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  は unique $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ 

2次の交代形式 3次元

 $\alpha_1 dy \wedge dz + \alpha_2 dz \wedge dx + \alpha_3 dx \wedge dy$ unique  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 

3次の交代形式

1次元 基底  ~~$(dx \wedge dy \wedge dz)$~~   ~~$(x, y, z)$~~  $dx \wedge dy \wedge dz$ 

$$(dx \wedge dy \wedge dz)(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Date

$\mathbb{R}^3$

スカラー場 ... 空間の各点にスカラー  $\varepsilon$  対応させよ  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

ベクトル場 ... 空間  $\mathbb{R}^3$  の各点にベクトル  $\varepsilon$  対応させよ

$f e_1 + g e_2 + h e_3 \quad f, g, h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

### 線型和

0次の微分形式 = スカラー場

1次の微分形式 ... 空間  $\mathbb{R}^3$  の各点に 1次の交代形式  $\varepsilon$  対応させよ

$$f dx + g dy + h dz$$

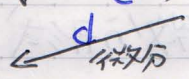
2次の微分形式 ... 空間  $\mathbb{R}^3$  の各点に 2次の交代形式  $\varepsilon$  対応させよ

$$f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$$

3次の微分形式 ... 空間  $\mathbb{R}^3$  の各点に 3次の交代形式  $\varepsilon$  対応させよ

$$f dx \wedge dy \wedge dz \quad f = f(x, y, z)$$

0次の微分形式  $\xrightarrow{\text{微分 } d}$  1次の微分形式



2次の微分形式  $\xrightarrow{\text{微分 } d}$  3次の微分形式

Stokesの定理

$$f \xrightarrow{d} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$f dx + g dy + h dz \xrightarrow{d} \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$$f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$$

$$\xrightarrow{d} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

f 0次の微分形式

1次の微分形式

$$f dx + g dy + h dz$$

f スカラー場

ベクトル場

$$f e_1 + g e_2 + h e_3$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \text{ の微分 } \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f}{\partial y} e_2 + \frac{\partial f}{\partial z} e_3$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

gradient) 勾配

1次の微分形式

$$f dx + g dy + h dz$$

2次の微分形式

$$f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$$

ベクトル場

$$f e_1 + g e_2 + h e_3$$

ベクトル場

$$f e_1 + g e_2 + h e_3$$

rotation)

回転

$$\left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz$$

$$+ \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz \wedge dx$$

$$+ \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

2次微分形式

$$f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$$



$d$   $\nearrow$   $\wedge$  外場  $f e_1 + g e_2 + h e_3$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

$d$   $\searrow$   $\text{div(ergence)}$   $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$   
発散

ベクトル場 1人2役 (  $\nabla$  による2次微分形式 )

スカラー場 1人2役 (  $0 = \text{grad}$  )

スカラー場  $\xrightarrow{\text{grad}}$  ベクトル場  $\xrightarrow{\text{rot}}$  ベクトル場  $\xrightarrow{\text{div}}$  スカラー場

$0 = \text{2次微分形式}$   $\xrightarrow{d}$  1次  $\xrightarrow{d}$  2次  $\xrightarrow{d}$  3次

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

↑がラ

作用素

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ベクトルにお. → 作用素のベクトル

f: スカラー場  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{grad } f$$

内積

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \text{div} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

ベクトル積

$$\nabla \times \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial y} & g \\ \frac{\partial}{\partial z} & h \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial z} & h \\ \frac{\partial}{\partial x} & f \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & f \\ \frac{\partial}{\partial y} & g \end{array} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{rot} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$\text{rot}(\text{grad } f) = 0$$

$$\text{rot} \left( \underline{\text{grad } f} \right)$$

$$= \text{rot} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$= \nabla \times \nabla f = (\nabla \times \nabla) f$$

$$\nabla \cdot \left( \nabla \times \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \right) = 0$$

3E543  
平行六面体の体積

行列式  $\rightarrow$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \nabla & \nabla & \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

(行列式"2" 27 0" 等... た F と 0 = 0)

析式

空間

スカラー  
1次元

基底

0次元の交代形式

ベクトル  
3次元

標準基底

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

スカラー  $x_1, x_2, x_3$  が  
uniqueに決まる

1次元の交代形式

3次元

$$\omega = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz \quad \text{3次元}$$

unique  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

2次元の交代形式

$$\alpha_1 dy \wedge dz + \alpha_2 dz \wedge dx + \alpha_3 dx \wedge dy$$

unique  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

3次元の交代形式

1次元

$$(dx \wedge dy \wedge dz)(x, y, z) =$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

スカラー場  $\mathbb{R}^3$  空間の各点にスカラーを対応させる

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

ベクトル場  $\mathbb{R}^3$  空間の各点にベクトルを対応させる

$$f\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3 \quad \underline{f, g, h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}}$$

0次の微分形式 = スカラー場

1次の微分形式  $\mathbb{R}^3$  空間の各点に1次の交代形式を対応させる

$$f dx + g dy + h dz$$

2次の 

---

 2次の 

---

$$f dz \wedge dx + g dx \wedge dx + h dx \wedge dy$$

3次の 

---

 3次の 

---

$$f dx \wedge dy \wedge dz$$

$f = f(x, y, z)$



Stokesの定理

0次の微分形式

微分  $d$

1次の微分形式

微分  $d$

2次の微分形式

微分  $d$

3次の微分形式

$f$

$\xrightarrow{d}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$f dx + g dy + h dz$$

$\xrightarrow{d}$

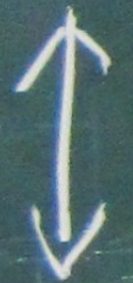
$$\left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz \wedge dx$$

$$+ \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$$f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$$

$$\left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

$f$  0次の微分形式



$f$  スカラー場

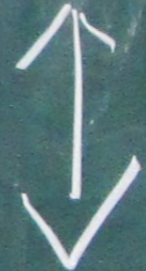
$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

1次の微分形式



ベクトル場

$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$   
 $f dx + g dy + h dz$



$f e_1 + g e_2 + h e_3$

$\frac{\partial f}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f}{\partial y} e_2 + \frac{\partial f}{\partial z} e_3$

gradient) 勾配

$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

2次の微分形式  $f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$

1次の微分形式

$$f dx + g dy + h dz$$

rotation 回転

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$\nabla \times V$

$\nabla \times V$  場

$$f e_1 + g e_2 + h e_3$$

$\nabla \times V$  場

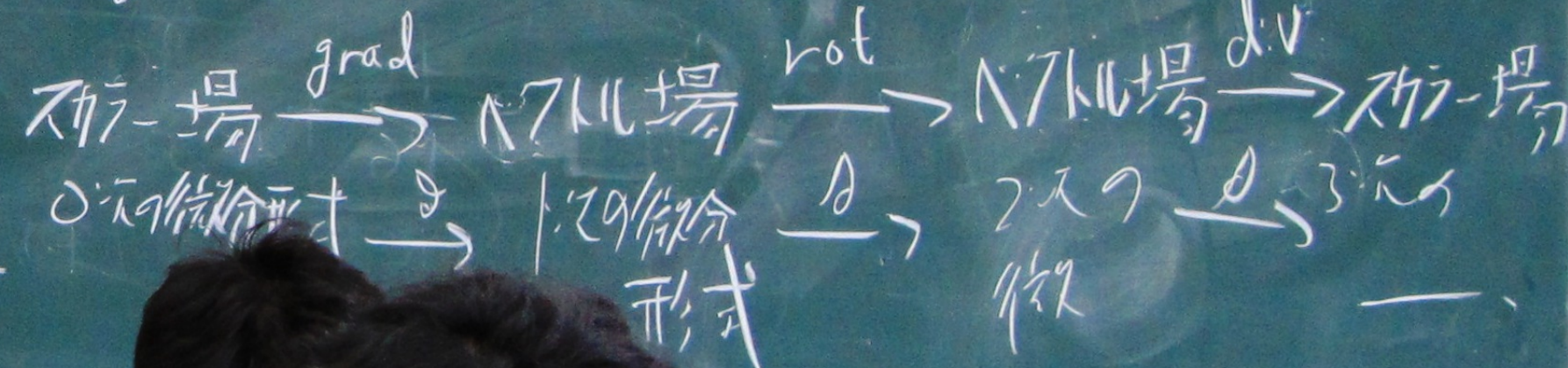
$$f e_1 + g e_2 + h e_3$$

2次の微分形式  
 $f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$

3次の微分形式  $dy \wedge dz \wedge dx$   
 $\xrightarrow{d} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$

$\downarrow$   
 1次元場  
 $f e_1 + g e_2 + h e_3$

$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$   
 div. (ergence)  
 発散



1次元場 1次元場  
 1次元場 1次元場

作用素

ラプラシアン

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

作用素のベクトル

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}$$

f スカラー場  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{grad } f$$

内積

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \text{div} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

ハズル積  $\nabla \times$   $\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \text{rot} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$\text{rot} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \nabla \times \nabla f = (\nabla \times \nabla) f$$

$$\text{rot}(\text{grad } f) = 0$$

$$a \times a = 0$$

↑↑↑

▽

$$\left( \begin{array}{c} \text{▽} \times \left( \begin{array}{c} f \\ g \\ h \end{array} \right) \end{array} \right)$$

= 0

行列式

$$a \cdot (b \times c) = | a \quad b \quad c |$$

▽

▽

$$\left( \begin{array}{c} f \\ g \\ h \end{array} \right)$$

= 0