Date 2011 12 7

ベクトル解析

微分形式

	空間	スカラー	ベクトル
		1次元	3次元

0次の交代形式はスカラーと同じ

1次の交代形式

$dx \quad dy \quad dz$: 基底

$$\omega = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は unique

標準基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

スカラー x_1 x_2 x_3 が unique に決まる

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

2次の交代形式 3次元

$$\alpha_1 dy \wedge dz + \alpha_2 dz \wedge dx + \alpha_3 dx \wedge dy$$

unique $\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3$

3次の交代形式

1次元 基底 ~~$(dx \wedge dy \wedge dz)(x, y, z)$~~

$dx \wedge dy \wedge dz$

$$(dx \wedge dy \wedge dz)(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

スカラー場 … 空間 $\mathbb{R}^3$ の各点にスカラーを対応させる　$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

ベクトル場 … 空間 $\mathbb{R}^3$ の各点にベクトルを対応させる

$$f\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3 \qquad f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

線型和

0次の微分形式 = スカラー場

1次の微分形式 … 空間 $\mathbb{R}^3$ の各点に1次の交代形式を対応させる

$$f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

2次の微分形式 … 空間 $\mathbb{R}^3$ の各点に2次の交代形式を対応させる

$$f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy$$

3次の微分形式 … 空間 $\mathbb{R}^3$ の各点に3次の交代形式を対応させる

$$f\,dx \wedge dy \wedge dz \qquad f = f(x, y, z)$$

0次の微分形式 $\xrightarrow[d]{\text{微分}}$ 1次の微分形式 $\xrightarrow[\text{微分}]{d}$

2次の微分形式 $\xrightarrow[\text{微分}]{d}$ 3次の微分形式

Stokesの定理

$$f \xrightarrow{d} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$f\,dx + g\,dy + h\,dz \xrightarrow{d} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)dz \wedge dx$$
$$+ \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx \wedge dy$$

$$f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$$

$$\xrightarrow{d} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

f 0次の微分形式 $\updownarrow$ f スカラー場

1次の微分形式 $\updownarrow$ ベクトル場

$f\,dx + g\,dy + h\,dz$ $\updownarrow$ $f\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

fの微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz$

$\updownarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_3 \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

grad(ient) 勾配

1次の微分形式

$$\boxed{f\,dx + g\,dy + h\,dz}$$

$\updownarrow$ 対応

ベクトル場 $f\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3$

微分

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\wedge dy$$

rot(ation) 回転

2次の微分形式

$f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge d$

$\updownarrow$ 対応

ベクトル場

$f\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3$

2次の微分形式

$f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + \cancel{h\,dx} + h\,dx \wedge dy$

$\updownarrow$

ベクトル場 $f e_1 + g e_2 + h e_3$

$d \downarrow$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$

div(ergence) 発散 $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$

ベクトル場 1人2役 （1次と2次の微分形式）

スカラー場 1人 2役 （0 〃 3次 〃 ）

スカラー場 $\xrightarrow{\text{grad}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\text{rot}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\text{div}}$ スカラー場

0次の微分形式 $\xrightarrow{d}$ 1次の――― $\xrightarrow{d}$ 2次の――― $\xrightarrow{d}$ 3次の―――

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

ナブラ

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$ 作用素

ベクトルのよう → 作用素のベクトル

f : スカラー場 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\cancel{\nabla \cdot f} \quad \nabla f = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\, f$$

内積

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \mathrm{div} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

ベクトル積

$$\nabla \times \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & g \\ \frac{\partial}{\partial z} & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & h \\ \frac{\partial}{\partial x} & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f \\ \frac{\partial}{\partial y} & g \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathrm{rot} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = 0$$

rot (grad f)

$$= \mathrm{rot}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{a} \times \mathbb{a} = 0$$

$$= \nabla \times \nabla f = (\nabla \times \nabla) f$$

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \right) = 0$$

張られる
平行六面体の体積

行列式

$$\mathbb{a} \cdot (\mathbb{b} \times \mathbb{c}) = |\,\mathbb{a}\ \mathbb{b}\ \mathbb{c}\,|$$

$$\left| \nabla\ \nabla\ \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \right| = 0$$

行列式で2つが等しいものだと0になる

空間

析

式

スカラー 1次元

0次の交代形式

ベクトル 3次元

基底

標準基底 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$

$x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$

スカラー x_1, x_2, x_3 が unique に決まる

1次の交代形式

3次元 $\omega=\alpha_1 dx+\alpha_2 dy+\alpha_3 dz$ と

unique $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

2次の交代形式

3次元 $\alpha_1 dy\wedge dz+\alpha_2 dz\wedge dx+\alpha_3 dx\wedge dy$

unique $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

3次の交代形式

1次元

$$(dx\wedge dy\wedge dz)(x, y, z)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ $z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$

スカラー場 … 空間$\mathbb{R}^3$の各点にスカラーを対応させる　$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

ベクトル場　空間$\mathbb{R}^3$の各点にベクトルを対応させる　$f\mathbf{e}_1+g\mathbf{e}_2+h\mathbf{e}_3$　$f,g,h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

追加

0次の微分形式 = スカラー場

1次の微分形式　空間$\mathbb{R}^3$の各点に1次の交代形式を対応させる　$f\,dx+g\,dy+h\,dz$

2次の ______ ______ 2次の ______　$f\,dy\wedge dz+g\,dz\wedge dx+h\,dx\wedge dy$

3次の ______ ______ 3次の ______　$f\,dx\wedge dy\wedge dz$

$f=f(x,y,z)$

Stokesの定理

0次の微分形式 $\xrightarrow[\text{微分}]{d}$ 1次の微分形式 $\xrightarrow[\text{微分}]{d}$ 2次の微分形式 $\xrightarrow[\text{微分}]{d}$ 3次の微分形式

$$f \xrightarrow{d} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$f\,dx + g\,dy + h\,dz \xrightarrow{d} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

$$f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy \xrightarrow{d} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

f　0次の微分形式 → 1次の微分形式

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$f\,dx+g\,dy+h\,dz$$

$\updownarrow$　　$\updownarrow$　　$\updownarrow$

f　スカラー場　　ベクトル場

$$f e_1 + g e_2 + h e_3$$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ →

$$\frac{\partial f}{\partial x} \ldots + \frac{\partial f}{\partial y} e_2 + \frac{\partial f}{\partial z}$$

gradient) 勾配

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2次の微分形式　$f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$

1次の微分形式

対応

$$\boxed{f\,dx + g\,dy + h\,dz}$$

rot(ation) 回転

$$\boxed{\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\wedge dy}$$

$\updownarrow$

ベクトル場　$f\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3$

ベクトル場　$f\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3$

2次の微分形式

$f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$

$\updownarrow$

ベクトル場

$f e_1 + g e_2 + h e_3$

$\xrightarrow{d}$ $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial h}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$ 3次の微分形式

$\longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial h}{\partial z}$

div.(ergence)

発散

ベクトル場 1人2役

スカラー場 1人2役

スカラー場 $\xrightarrow{\text{grad}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\text{rot}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\text{div}}$ スカラー場

0次の微分形式 $\xrightarrow{d}$ 1次の微分形式 $\xrightarrow{d}$ 2次の微 $\xrightarrow{d}$ 3次の

ナブラ

作用素

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

f: スカラー場 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\, f$$

作用素のベクトル

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

内積

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \mathrm{div} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

ベクトル積

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla \times \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & g \\ \frac{\partial}{\partial z} & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & h \\ \frac{\partial}{\partial x} & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f \\ \frac{\partial}{\partial y} & g \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathrm{rot} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\ (\underline{\mathrm{grad}\ f}) = 0 \qquad a \times a = 0$$

$$\mathrm{rot} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \nabla \times \nabla f = (\nabla \times \nabla) f$$

ナブラ

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\begin{pmatrix}f\\g\\h\end{pmatrix}\right)=0$$

行列式

$$\mathbb{a}\cdot(\mathbb{b}\times\mathbb{c})=\left|\mathbb{a}\ \mathbb{b}\ \mathbb{c}\right|$$

$$\left|\nabla\ \ \nabla\ \ \begin{pmatrix}f\\g\\h\end{pmatrix}\right|=0$$