微積分

微積分学の基本定理 (1次元)

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

f'の区間[a.b]での積分

fの区間[a.b]の境界

$\partial[a.b] = \{+b, -a\}$

での積分

無限小のlevelで成立てばよい。

⇓ 自動的

一般のlevel

⇓ f'の定義がそうなるように決めてある

⇓ 高次元へ一般化する

Stokesの定理
(ストークス)

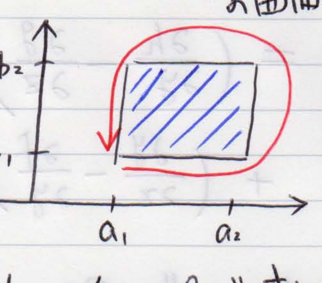
ω: n次の微分形式

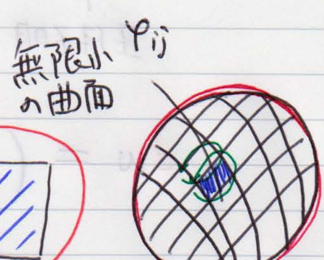
(n = 0. 1. 2)

n = 1

曲面 $\varphi : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \to \mathbb{R}^3$

$$\boxed{\int_\varphi \underbrace{d\omega}_{\text{2次の微分形式}} = \int_{\partial\varphi} \omega}$$





無限小のlevelで成立すればよい

⇓ 自動的

一般のlevel

$$\int_{\varphi} dw = \sum_{i,j} \int_{\varphi_{ij}} dw = \sum_{i,j} \int_{\partial \varphi_{ij}} w$$

$$= \int_{\partial \varphi} w$$

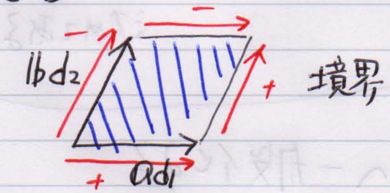
※ dw を定義する必要がある

1次の微分形式

$$w = f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

$$f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$d_1, d_2 \in D$



曲面　無限小の平行四辺形

$$\int_{\varphi} dw = \int_{\partial \varphi} w \Rightarrow \cdots \left\{ \begin{pmatrix} f'(x)(\mathbb{a}) \\ g'(x)(\mathbb{a}) \\ h'(x)(\mathbb{a}) \end{pmatrix} \cdot \mathbb{b} - \begin{pmatrix} f'(x)(\mathbb{b}) \\ g'(x)(\mathbb{b}) \\ h'(x)(\mathbb{b}) \end{pmatrix} \cdot \mathbb{a} \right\} \times d_1 d_2$$

正体不明

これを計算した!

$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 写像

交代形式

$$dw = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz \wedge dx$$

$$+ \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

基底

$\mathbb{a} = \mathbb{e}_2 \quad \mathbb{b} = \mathbb{e}_3$

頭が悪いと…

$$f'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}\overset{x}{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\quad f'(x)(a)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}a_1+\frac{\partial f}{\partial y}a_2+\frac{\partial f}{\partial z}a_3\\ \frac{\partial g}{\partial x}a_1+\frac{\partial g}{\partial y}a_2+\frac{\partial g}{\partial z}a_3\\ \frac{\partial h}{\partial x}a_1+\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\frac{\partial g}{\partial x}a_1+\frac{\partial g}{\partial y}a_2+\frac{\partial g}{\partial z}a_3}$$

人足計算

↓

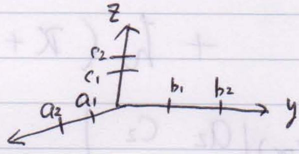
まじめにまじめに計算する

問題I

n=1の場合

n=2の場合

2次の微分形式



$$\omega=f\,dy\wedge dz+g\,dz\wedge dx+h\,dx\wedge dy$$

領域

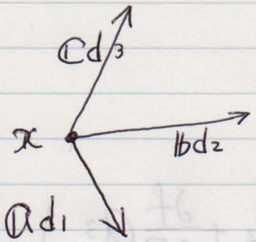
$$\varphi:[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]\times[c_1,c_2]\longrightarrow\mathbb{R}^3$$

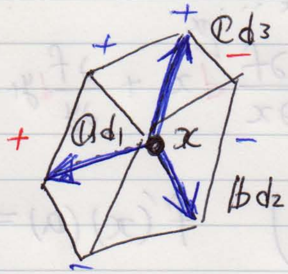
$$\int_\varphi d\omega=\int_{\partial\varphi}\omega$$

無限小のlevelで成立すればよい

$d_1, d_2, d_3 \in D$

φ





$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

無限小の平行六面体

x軸に直
y 〃

$$\int_{\partial\varphi} \omega = -\left\{ f(x)\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + g(x)\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + h(x)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\} \times d_2 d_3$$

$$+ \left\{ f(x+\mathbb{a}d_1)\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + g(x+\mathbb{a}d_1)\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + h(x+\mathbb{a}d_1)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} d_2 d_3$$

$$+ \left\{ f(x)\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + g(x)\begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} + h(x)\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} d_1 d_3$$

$$+ f(x+\mathbb{b}d_2)\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + g(x+\mathbb{b}d_2)\begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} + h(x+\mathbb{b}d_2)\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \Big\} d_1 d_3$$

$$- \left\{ f(x)\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + g(x)\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + h(x)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right\} d_1 d_2$$

$$+ f(x+\mathbb{c}d_3)\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + g(x+\mathbb{c}d_3)\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + h(x+\mathbb{c}d_3)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \Big\} d_1 d_2$$

$\{\underset{3個}{\mathbb{a}}\}$ 6個

$\{0\}$

$$f(x+\mathbb{a}d_1)-f(x)=f'(x)(\mathbb{a})d_1$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} f'(x)(\mathbb{a}) & \mathbb{b} & \mathbb{c} \\ g'(x)(\mathbb{a}) & & \\ h'(x)(\mathbb{a}) & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbb{a} & f'(x)(\mathbb{b}) & \mathbb{c} \\ & g'(x)(\mathbb{b}) & \\ & h'(x)(\mathbb{b}) & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbb{a} & \mathbb{b} & f'(x)(\mathbb{c}) \\ & & g'(x)(\mathbb{c}) \\ & & h'(x)(\mathbb{c}) \end{vmatrix} \right\} d_1 d_2 d_3$$

$(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$

$\downarrow$ 写像

問題~~Ⅱ~~Ⅱ 3重線型であることを確認.

交代であることを確認

3次の交代形式

$(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}) \mapsto |\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}|$

3×3の行列式

$\mathbb{a}=\mathbb{e}_1$, $\mathbb{b}=\mathbb{e}_2$, $\mathbb{c}=\mathbb{e}_3$ とおく。

$(x)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$

プロの計算

問題Ⅲ

人足計算

1次元

微積分学の基本定理

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

f' の区間 $[a,b]$ での積分

f の区間 $[a,b]$ の境界

$\partial[a,b] = \{+b, -a\}$

での積分

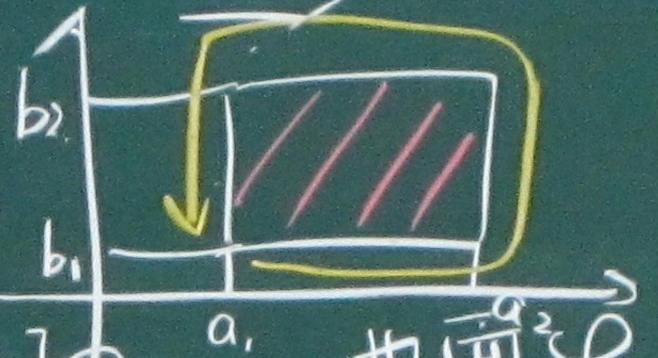
無限小の level で成立てば…

⇓ 自動的

一般の level

⇓ f' の定義がそうなるように決めてある

高次元へ一般化する



曲面 φ : $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \to \mathbb{R}^3$

空間 $\mathbb{R}^3$

Stokes の定理

(ストークス)

ω : n 次の微分形式 $(n = 0, 1, 2)$

定義するのが重要 $n=1$

$$\boxed{\int_\varphi \underbrace{d\omega}_{\text{2次の微分形式}} = \int_{\partial\varphi} \omega}$$

無限小の level で成立すれば…

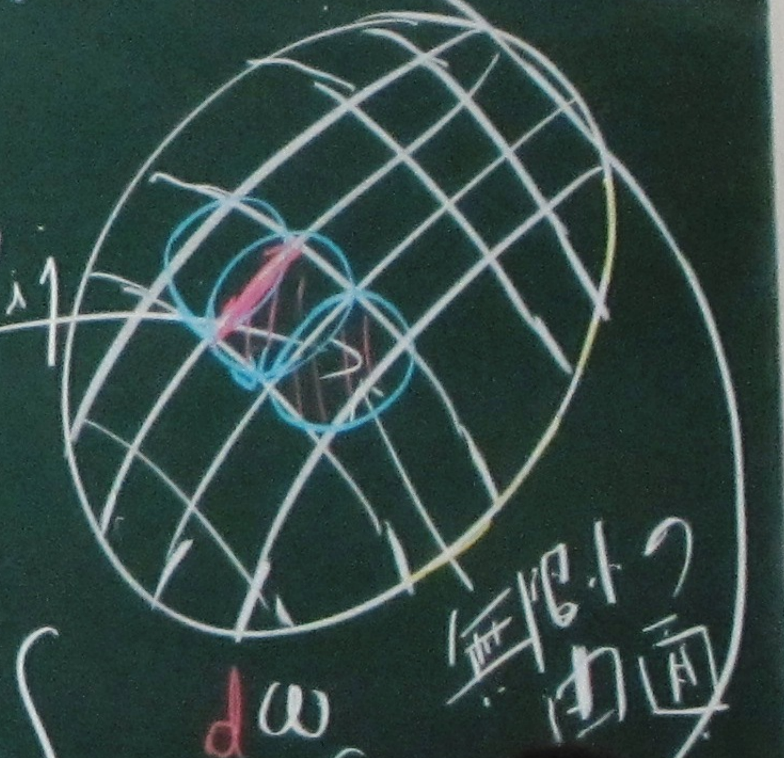
⇓ 自動的

一般の level

$$\int d\omega = \sum_{i,j} \int_{\varphi_{i,j}} d\omega = \int$$

$$= \int_{\partial\varphi} \omega$$

曲面



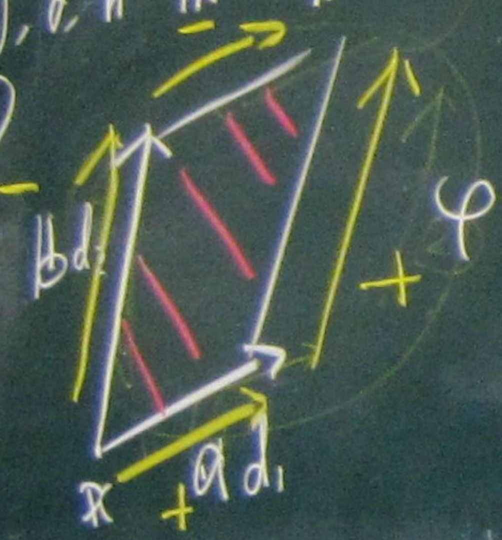
無限小の曲面

1次の微分形式

$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$

$f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$d_1, d_2 \in D$



境界

曲面 無限小の平行四辺形

$$\int_{\varphi} d\omega = \int_{\partial\varphi} \omega \Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} f'(x)(\mathbb{a}) \\ g'(x)(\mathbb{a}) \\ h'(x)(\mathbb{a}) \end{pmatrix} \cdot \mathbb{b} - \begin{pmatrix} f'(x)(\mathbb{b}) \\ g'(x)(\mathbb{b}) \\ h'(x)(\mathbb{b}) \end{pmatrix} \cdot \mathbb{a} \right\} d_1 d_2$$

正体不明

これを計算した!

$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 写像 交代形式

$$d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

$\mathbb{a} = \mathbb{e}_2$

$\mathbb{b} = \mathbb{e}_3$

基底 頭が悪い、

I

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

まじめにまじめに計算する

$$f'(x)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}a_1 + \frac{\partial f}{\partial y}a_2 + \frac{\partial f}{\partial z}a_3 \\ \frac{\partial g}{\partial x}a_1 + \frac{\partial g}{\partial y}a_2 + \frac{\partial g}{\partial z}a_3 \\ \frac{\partial h}{\partial x}a_1 + \frac{\partial h}{\partial y}a_2 + \frac{\partial h}{\partial z}a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

プロの計算

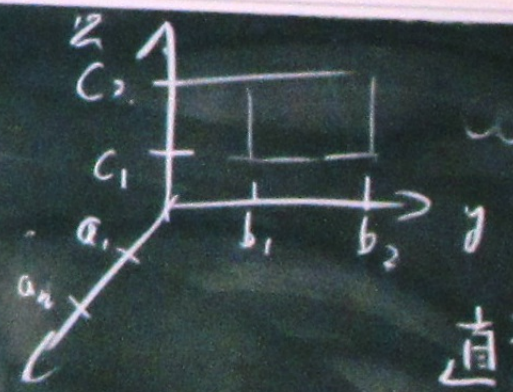
人足計算

領域

$$\varphi : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \to \mathbb{R}^3$$

n=1の場合

n=2の場合



面

直方体

ω

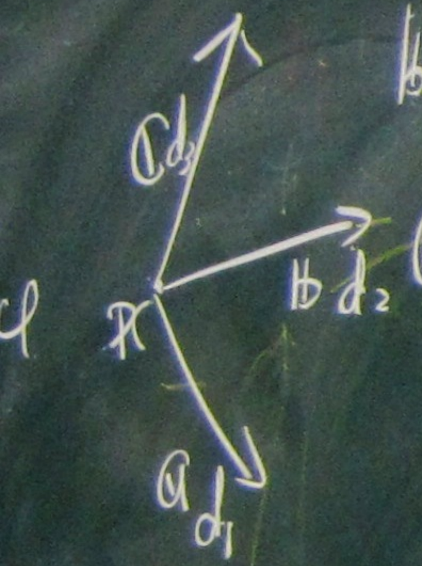
2次の微分形式

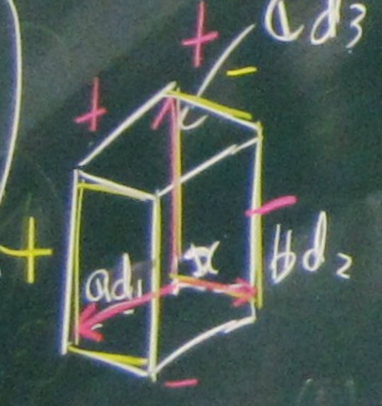
$$\omega = f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy$$

$$\int_{\varphi} d\omega = \int_{\partial\varphi} \omega$$

無限小のlevelで成立すれば…

$d_1, d_2, d_3 \in D$ $\quad \mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$





$$\int_{\partial\varphi} \omega = -\left\{ f(x) \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + g(x) \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + h(x) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} d_2 d_3$$

$$+ \left\{ f(x+\mathbb{a}d_1) \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + g(x+\mathbb{a}d_1) \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + h(x+\mathbb{a}d_1) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} d_2 d_3$$

$$+ \left\{ f(x) \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + g(x) \begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} + h(x) \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} d_1 d_3$$

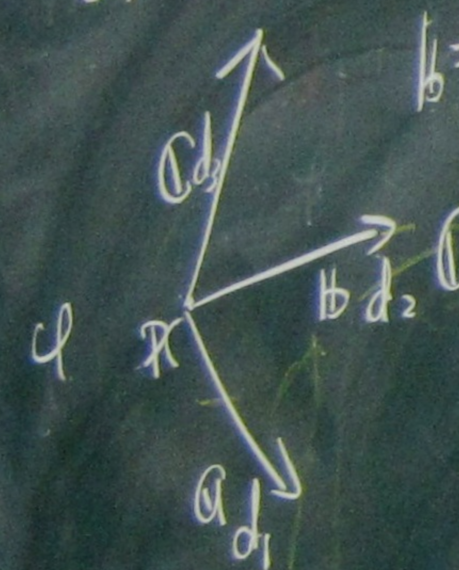
$$\{ f(x+\mathbb{b}d_2) \quad \} d_1 d_3$$

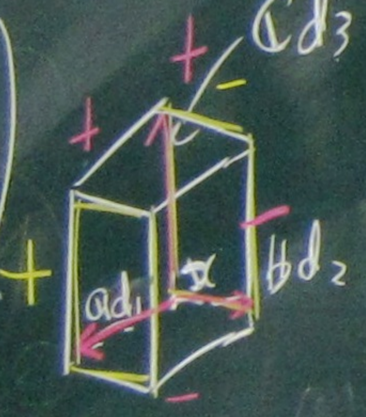
x軸に直

無限小の平行六面体

$$f(x) \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + g(x) \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + h(x) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \Big\} d_1 d_2 + \{ f(x+\mathbb{c}d_3) \quad + g(x+\mathbb{c}d_3) \quad + \quad \} d_1 d_2$$

$d_1, d_2, d_3 \in D$ $\quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$





x軸に直

無限小の平行六面体 y

$$\int_{\partial\varphi} \omega = -\left\{ f(x)\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + g(x)\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + h(x)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} d_2 d_3$$

$$+\left\{ f(x+\mathbf{a}d_1)\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + g(x+\mathbf{a}d_1)\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + h(x+\mathbf{a}d_1)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} d_2 d_3$$

$$+\left\{ f(x)\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + g(x)\begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} + h(x)\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} d_1 d_3$$

$$\left\{ f(x+\mathbf{b}d_2) \right.$$ ← 基底 項が要 $\left. \right\} d_1 d_3$

$$-\left\{ f(x)\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + g(x)\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + h(x)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right\} d_1 d_2 + \left\{ f(x+\mathbf{c}d_3) \quad + g(x+\mathbf{c}d_3) \quad + \right\} d_1 d_2$$

$|0 \quad \{ \; 6$ 個
$\overline{}$ 3 個
$|0 \quad \{$

$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

$\mathbb{a} = \alpha \mathbb{a}$

$\mathbb{a} = \mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2$

II 3重線型
交代

3次の交代形

$(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

3×3 行列式 | 次元

$(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}) \mapsto d\,\underline{\mathbb{a}\ \mathbb{b}\ \mathbb{c}}$

$\downarrow$ 写像

$\mathbb{a} = \mathbb{e}_1$
$\mathbb{b} = \mathbb{e}_2$
$\mathbb{c} = \mathbb{e}_3$

$f(x + \mathbb{a} d_1) - f(x) = f'(x)(\mathbb{a}) d_1$
3×3

$$= \left\{ \begin{vmatrix} f'(x)(\mathbb{a}) & & \\ g'(x)(\mathbb{a}) & \mathbb{b} & \mathbb{c} \\ h'(x)(\mathbb{a}) & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & f'(x)(\mathbb{b}) & \\ \mathbb{a} & g'(x)(\mathbb{b}) & \mathbb{c} \\ & h'(x)(\mathbb{b}) & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & f'(x)(\mathbb{c}) \\ \mathbb{a} & \mathbb{b} & g'(x)(\mathbb{c}) \\ & & h'(x)(\mathbb{c}) \end{vmatrix} \right\} d_1 d_2 \ldots$$

III