Date 2011 11 2

スカラー場　温度、気圧

ベクトル場　力　流れ

platonicな立場

(plato　プラトン)

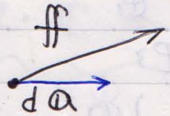
美は永遠である

idea

pragmaticな立場

力

$d \in D$



再発見

仕事

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{a} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{a})d$$

線型写像　$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbf{f} \cdot \mathbf{a} \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

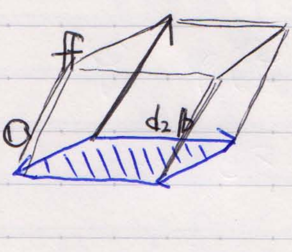
$$= \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(水の)

流れ

升(ます)をつくる



単位時間

どれだけの水が流れるか？

$d_1\mathbf{a}$, $d_2\mathbf{b}$, $\mathbf{f}$ でつくられる平行六面体の体積

$$\mathbf{f} \cdot (d_1\mathbf{a} \times d_2\mathbf{b})$$

$$= \mathbf{f} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, d_1 d_2$$

写像 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$\mapsto \mathbf{f} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \in \mathbb{R}$

二重線型　交代(反対称)

このような写像を(2次の)交代形式という

$\mathbb{a} = \mathbb{e}_1 \quad \mathbb{b} = \mathbb{e}_2$

$\mathbb{f} \quad \mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2 = \mathbb{e}_3$ → $\mathbb{f} \cdot (\mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2)$ → z成分が出てくる

$\mathbb{e}_2 \times \mathbb{e}_3 = \mathbb{e}_1$

$\mathbb{e}_3 \times \mathbb{e}_1 = \mathbb{e}_2$

0次の ~~微分形式~~
交代形式

1次の 微分形式

2次の 〃

$\mathbb{R}^3$ 3次元

1次の交代形式の全体

$$\varphi(x) = \varphi(x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2 + x_3\mathbb{e}_3) = x_1\varphi(\mathbb{e}_1) + x_2\varphi(\mathbb{e}_2) + x_3\varphi(\mathbb{e}_3)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2 + x_3\mathbb{e}_3$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 \quad dx$ ($\leftarrow \frac{dy}{dx}$ の d)

$\mapsto x_2 \quad dy$

$\mapsto x_3 \quad dz$ 　空間の次元といったとでいえば3次元

$$\varphi = \varphi(\mathbb{e}_1)\,dx + \varphi(\mathbb{e}_2)\,dy + \varphi(\mathbb{e}_3)\,dz$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3)$$

2次の交代形式

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,\ y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3)$$

$$= x_1 y_1 \varphi(e_1, e_1) + x_1 y_2 \varphi(e_1, e_2) + \cdots$$

$\varphi(e_1, e_1) = -\varphi(e_1, e_1)$
$\to (e_1, e_1) = 0$

$$= (x_2 y_1 - x_2 y_1)\varphi(e_1, e_2)$$
$$+ (x_2 y_3 - x_3 y_2)\varphi(e_2, e_3)$$
$$+ (x_3 y_1 - x_1 y_3)\varphi(e_3, e_1)$$

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$x_2 y_3 - x_3 y_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$x_3 y_1 - x_1 y_3 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

wedge (くさび形)

$$(x, y) \longmapsto \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$ 2次の交代形式 $dx \wedge dy$

$$\longmapsto \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$ $dy \wedge dz$

$$\longmapsto \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$ $dz \wedge dx$

$$\varphi = \varphi(e_1, e_2)\, dx \wedge dy + \varphi(e_2, e_3)\, dy \wedge dz$$
$$+ dz \wedge dx$$

$$\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = (z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3)$$

3次の交代形式

$$\varphi(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \varphi(e_1, e_2, e_3)$$

3重線型
交代

Report I これを示す。

$$\left.\begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{matrix}\right\}$$ 1次の交代形式

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\varphi_2(x)$$

2次の交代形式？

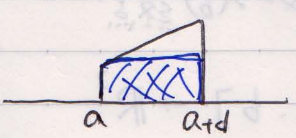
Report II （2重線型 / xとyをいれかえたら符号がかわる） 2次の交代形式であることを示す

微積分学の基本定理

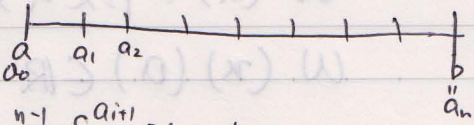
0次の微分形式 $\xrightarrow{\text{微分}}$ 1次の微分形式 $\xrightarrow{\text{微分}}$ 2次の微分形式 $\xrightarrow{\text{微分}}$ 3次の微分形式

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

とくに、$b = a + d \ (d \in D)$ の場合



$$\int_a^{a+d} f'(x)\,dx = f'(a)d$$



$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\,dx$$

ただし $a_{i+1} - a_i = d_i \in D$

$$f'(a)d = f(a+d) - f(a)$$

我々の微分の定義

微積分学の基本定理が無限小の区間で成り立つように決めている

$$\int_{a_0}^{a_1} f'(x)\,dx = \cancel{f(a_1)} - f(a_0)$$

$$\int_{a_1}^{a_2} f'(x)\,dx = \cancel{f(a_2)} - \cancel{f(a_1)}$$

自動的

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$+$

$$\int_{a}^{b} f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

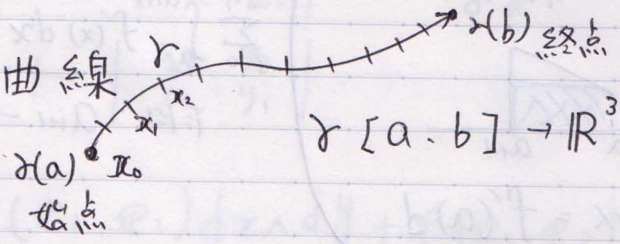
1次の微分形式

$\omega : \mathbb{R}^3 \to$ 1次の交代形式

線型写像 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\omega(x)$: 1次の交代形式

$\omega(x)(a) \in \mathbb{R}$



$\gamma\ [a.b] \to \mathbb{R}^3$

積分 $\int_\gamma \omega$

$(a_{i+1} - a_i) \in D$

スカラー場　温度, 気圧

ベクトル場　力　流れ

platonicな立場
(plato プラトン)

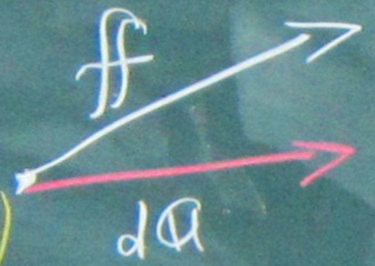
美は永遠である

idea

pragmaticな立場

計測

$d \in D$　力



仕事

再発見
(recover)

線型写像

$\mathbf{f}\cdot d\mathbf{a} = (\mathbf{f}\cdot\mathbf{a})\,d$

$\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbf{f}\cdot\mathbf{a}\in\mathbb{R}$

1次の交代形式

$\mathbf{a}=\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$=\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

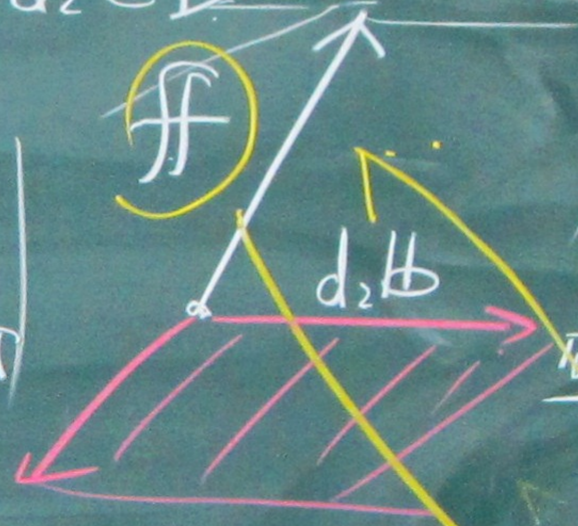
$\mathbf{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1$

$\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2$

$d_1, d_2 \in D$

(水の)流れ　平行六面体



単位時間
どれだけの水が
横切るか?

$\mathbf{a}=\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$　　$\mathbf{b}=\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1$

$d_1\mathbf{a}$, $d_2\mathbf{b}$　$\mathbf{f}$　$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3$

$\mathbf{f}\cdot(d_1\mathbf{a}\times d_2\mathbf{b})$

$=\mathbf{f}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,d_1d_2$　2次の交代形式

写像

$(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$

$\longmapsto \mathbf{f}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ [illegible]

二重[illegible]

0次の交代形式
1次の微分形式
2次の
$\mathbb{R}^3$ 3次元

1次の交代形式の全体

$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3)$
$= x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2) + x_3 \varphi(e_3)$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\dfrac{dy}{dx}$
$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1 e_1 +$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \mapsto x_1 & dx \\ \mapsto x_2 & dy \\ \mapsto x_3 & dz \end{matrix}$

$\varphi = \varphi(e_1)dx + \varphi(e_2)dy$
$+ \varphi(e_3)dz$

3次元
$\varphi(e_1, e_1) = -\varphi(e_1, e_1)$
$\underline{\varphi(e_1, e_1)}$
0

2次の交代形式

$3 \times 3 = 9$
6
$x_2 y_1 \varphi(e_2, e_1) = -x_2 y_1 \varphi(e_1,$

$\varphi(x, y) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$
$\varphi(e_2, e_2)$
$= x_1 y_1 \underline{\varphi(e_1, e_1)} + x_1 y_2 \varphi(e_1, e_2) +$
$= (x_1 y_1 - x_2 y_1)\varphi(e_1, e_2)$
$+ (x_2 y_3 - x_3 y_2)\varphi(e_2, e_3)$
$+ (x_3 y_1 - x_1 y_3)\varphi(e_3, e_1)$

$$x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$x_2y_3 - x_3y_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$x_3y_1 - x_1y_3 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\longmapsto \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

3次元

$$\varphi = \varphi(e_1, e_2) \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$+\varphi(e_2, e_3) \quad = z_1 e_1 +$$

$$+\varphi(e_3, e_1) \quad \varphi(e_1, e_1, e_3)$$

2次の交代形式

wedge
くさび形

$dx \wedge dy$

$dy \wedge dz$

$dz \wedge dx$

27

3次の交代形式

$$\varphi(\overset{3}{x}, \overset{3}{y}, \overset{3}{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \underline{\varphi(e_1, e_2, e_3)} \qquad \text{I}$$

3重線型
交代

$\left.\begin{matrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{matrix}\right\}$ 1次の交代形式

2次の交代形式？

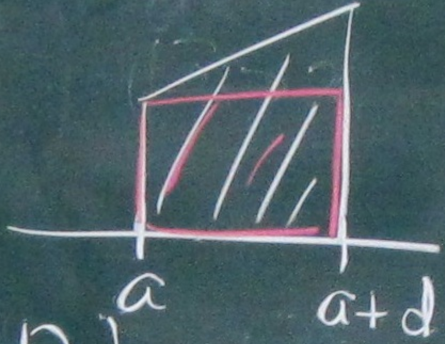
$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\varphi_2(x)$$

2重線型

微積分学の基本定理

無限小の区間

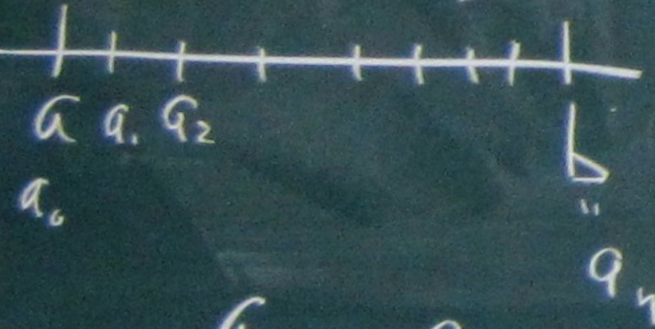
$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$



0次の微分形式 $\xrightarrow{\text{微分}}$ 1次の微分形式 $\xrightarrow{\text{微分}}$ 2次の微分形式 $\xrightarrow{\text{微分}}$ 3次の微分形式

$$\|$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\,dx$$



$$a_{i+1} - a_i = d_i \in D$$

$$b = a + d \quad (d \in D)$$

$$\int_a^{a+d} f'(x)\,dx = f'(a)\,d \quad (\forall d \in D)$$

$$f'(a)\,d = f(a+d) - f(a)$$

我々の微分の定義

$$\int_{a_0}^{a_1} f'(x)\,dx = \cancel{f(a_1)} - f(a_0)$$

$$\int_{a_1}^{a_2} f'(x)\,dx = \cancel{f(a_2)} - \cancel{f(a_1)}$$

+)

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

自動的

1次の微分形式

$\omega : \mathbb{R}^3 \to$ 1次の交代形式

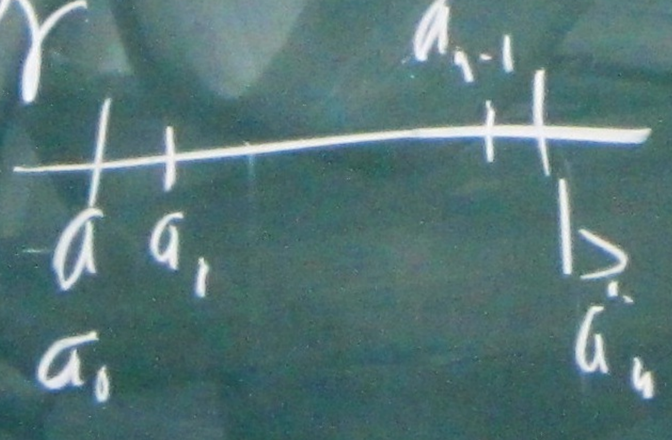
線型写像 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\omega(x)$: 1次の交代形式

$\omega(x)(a) \in \mathbb{R}$

$a_{i+1} - a_i \in D$

積分 $\int_\gamma \omega$



曲線

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$