今回の
レポート提出 〆切り 10/31

行列式　平面

$S(\mathbb{a}, \mathbb{b})$

$\mathbb{a}$と$\mathbb{b}$で張られる平行四辺形の面積

$\mathbb{a}$から$\mathbb{b}$が反時計回り　＋

〃　　時計回り　－

反対称 $\boxed{S(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = -S(\mathbb{b}, \mathbb{a})}$

$S(\mathbb{a}, \mathbb{a}) = -S(\mathbb{a}, \mathbb{a})$

$\Rightarrow 2S(\mathbb{a}, \mathbb{a}) = 0 \Rightarrow S(\mathbb{a}, \mathbb{a}) = 0$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$

2重線型形式

- $S(\alpha\mathbb{a}, \mathbb{b}) = \alpha S(\mathbb{a}, \mathbb{b})$
- $S(\mathbb{a}, \beta\mathbb{b}) = \beta S(\mathbb{a}, \mathbb{b})$
- $S(\mathbb{a}, \mathbb{b}_1 + \mathbb{b}_2) = S(\mathbb{a}, \mathbb{b}_2) + S(\mathbb{a}, \mathbb{b}_1)$

- $S(\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2, \mathbb{b}) = S(\mathbb{a}_1, \mathbb{b}) + S(\mathbb{a}_2, \mathbb{b})$

$\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\mathbb{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$S(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2) = 1$　$S(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_1) = -1$　$S(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_1) = S(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_2) = 0$

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2$$

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \mathbb{e}_1 + b_2 \mathbb{e}_2$$

$$S(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = S(a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2,\ b_1 \mathbb{e}_1 + b_2 \mathbb{e}_2)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{S(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_1)}_{0} + a_1 b_2 \underbrace{S(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)}_{1}$$

$$+ a_2 b_1 \underbrace{S(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_1)}_{-1} + a_2 b_2 \underbrace{S(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_2)}_{0}$$

$$= \underbrace{a_1 b_2 - a_2 b_1}_{\text{天下り}} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = |\mathbb{a}\ \mathbb{b}|$$

空間

$V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$

$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ が張る平行六面体の $\overbrace{\text{体積}}^{\text{符号のついた}}$

（$\mathbb{a}$ から $\mathbb{b}$ へ右ねじを回したとき進む方向に $\mathbb{c}$ があれば $+$）

右手系 $+$

左手系 $-$

三重線形性

$$V(\alpha \mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}) = \alpha V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$$

$$V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}) = -V(\mathbb{a}, \mathbb{c}, \mathbb{b})$$ ← 反対称性

$$V(\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2, \mathbb{b}, \mathbb{c}) = V(\mathbb{a}_1, \mathbb{b}, \mathbb{c}) + V(\mathbb{a}_2, \mathbb{b}, \mathbb{c})$$

$$V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{b}) = 0$$

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2 + a_3 \mathbb{e}_3$$

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（レポート　[ABC] は |ABC|
A B は a b のことである）

$$V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}) = V(\underset{3}{__}\ \underset{3}{__}\ \underset{3}{__})$$

3×3×3=27
そのうちこれは対称性
により消える
消えないのは3!=6つ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

サラスの公式

内積（空間）

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = |\mathbb{a}||\mathbb{b}|\cos\theta$$

幾何学的定義

$$\left.\begin{aligned} (\alpha\mathbb{a})\cdot\mathbb{b} &= \alpha(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}) \\ (\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_2)\cdot\mathbb{b} &= \mathbb{a}_1\cdot\mathbb{b} + \mathbb{a}_2\cdot\mathbb{b} \end{aligned}\right\} \text{二重線型性}$$

$$\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = \mathbb{b}\cdot\mathbb{a} \quad \text{（対称性）}$$

$$\mathbb{e}_1\cdot\mathbb{e}_2 = \mathbb{e}_1\cdot\mathbb{e}_3 = \mathbb{e}_2\cdot\mathbb{e}_3 = 0$$

$$\mathbb{e}_1\cdot\mathbb{e}_1 = \mathbb{e}_2\cdot\mathbb{e}_2 = \mathbb{e}_3\cdot\mathbb{e}_3 = 1$$

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3 \qquad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2 + b_3\mathbb{e}_3$$

$\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}$

$= a_1 b_1 \mathbb{e}_1\cdot\mathbb{e}_1 + a_2 b_2 \mathbb{e}_2\mathbb{e}_2 + a_3 b_3 \mathbb{e}_3\mathbb{e}_3$

$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

解析的定義

ベクトル積（外積）

$\mathbb{a}\times\mathbb{b}$　ベクトル　$\mathbb{a}$と$\mathbb{b}$に直交

大きさ：$\mathbb{a}$と$\mathbb{b}$の張る平行四辺形の面積

$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{a}\times\mathbb{b}$　右手系

$\mathbb{a}\times\mathbb{b} = -\mathbb{b}\times\mathbb{a}$

$\alpha\,\mathbb{a}\times\mathbb{b} = \alpha(\mathbb{a}\times\mathbb{b})$

$(\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_2)\times\mathbb{b} = \mathbb{a}_1\times\mathbb{b} + \mathbb{a}_2\mathbb{b}$

} 二重線型性

$(\mathbb{a}\times\mathbb{b})\cdot\mathbb{c} = V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$

底面積×高さ

平行四辺形の面積

底辺×高さ

平行六面体の体積

底面積×高さ

$$\{(\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_2)\times\mathbb{b}\}\cdot\mathbb{c} = V(\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_2,\mathbb{b},\mathbb{c})$$

$$= V(\mathbb{a}_1,\mathbb{b},\mathbb{c}) + V(\mathbb{a}_2,\mathbb{b},\mathbb{c})$$

$$= (\mathbb{a}_1\times\mathbb{b})\cdot\mathbb{c} + (\mathbb{a}_2\times\mathbb{b})\cdot\mathbb{c}$$

$$= \{\mathbb{a}_1\times\mathbb{b} + \mathbb{a}_2\times\mathbb{b}\}\cdot\mathbb{c}$$

$$\mathbb{x}\cdot\mathbb{c} = \mathbb{y}\cdot\mathbb{c} \Rightarrow \mathbb{x} = \mathbb{y}$$

が言えるか？

$$(\mathbb{x}-\mathbb{y})\cdot\mathbb{c}$$

$$\parallel$$

$$0$$

$\mathbb{c}$は何でもよいので、$\mathbb{c} = \mathbb{x}-\mathbb{y}$とする。

$$(\mathbb{x}-\mathbb{y})\cdot(\mathbb{x}-\mathbb{y}) = 0$$

(長さが0)

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{x} = \mathbb{y}$$

よって 二重線型性が成り立つことが分かる

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_1 b_2 \underbrace{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}_{\mathbf{e}_3} + a_2 b_1 \underbrace{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1}_{-\mathbf{e}_3} \\
&\quad + a_1 b_3 \underbrace{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3}_{-\mathbf{e}_2} + a_3 b_1 \underbrace{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}_{\mathbf{e}_2} \\
&\quad + a_2 b_3 \underbrace{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}_{\mathbf{e}_1} + a_3 b_2 \underbrace{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2}_{-\mathbf{e}_1} \\
&= (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{e}_3 \\
&\quad + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{e}_2 \\
&\quad + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{e}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

向量积的定义

10月31日(月)

行列式　平面

$\beta, \alpha \in \mathbb{R}$

2重線型形式

$$\begin{cases} S(\alpha \mathbb{a}, \mathbb{b}) = \alpha S(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \\ S(\mathbb{a}, \beta \mathbb{b}) = \beta S(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \\ S(\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2, \mathbb{b}) = S(\mathbb{a}_1, \mathbb{b}) + S(\mathbb{a}_2, \mathbb{b}) \\ S(\mathbb{a}, \mathbb{b}_1 + \mathbb{b}_2) = S(\mathbb{a}, \mathbb{b}_1) + S(\mathbb{a}, \mathbb{b}_2) \end{cases}$$

$\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

合同

$S(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2) = 1$

$S(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_1) = -1$

$S(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_1) = S(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_2) = 0$

$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2$

$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \mathbb{e}_1 + b_2 \mathbb{e}_2$

$$S(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = S(a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2, b_1 \mathbb{e}_1 + b_2 \mathbb{e}_2)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{S(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_1)}_{0} + a_1 b_2 \underbrace{S(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)}_{1} + a_2 b_1 \underbrace{S(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_1)}_{-1} + a_2 b_2 \underbrace{S(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_2)}_{0}$$

$$= \underbrace{a_1 b_2 - a_2 b_1}_{\text{天下}}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = |\mathbb{a}\ \mathbb{b}|$$

$\mathbb{e}$

空間 糖 化学式

$V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$

$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ が張る
平行六面体の
符号のついた体積
右手系 $+$
左手系 $-$ 反対称

$V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}) = -V(\mathbb{a}, \mathbb{c}, \mathbb{b})$

$V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{b}) = 0$

異性体

三重線型性

$V(\alpha\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}) = \alpha V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$

$V(\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2, \mathbb{b}, \mathbb{c}) = V(\mathbb{a}_1, \mathbb{b}, \mathbb{c}) + V(\mathbb{a}_2, \mathbb{b}, \mathbb{c})$

$\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbb{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3$

$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$

$\mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$

$V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}) = V(\underset{3}{__}\ \underset{3}{__}\ \underset{3}{__})$

$3 \times 3 \times 3 = 27$

27は消える

$3! = 6$

サラスの方法

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1$$

$$- a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2$$

$$- a_2 b_1 c_3$$

積（空間）

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$

幾何学的定義

対称性

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$

$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}$

$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$$

$3 \times 3 = 9$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

$= a_1 b_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3$

$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

解析的定義

平行四辺形の面積
高さ
底辺
底辺×高さ
平行六面体の体積
a×b
θ
c
a
b
底面積×高さ

ベクトル積（外積）

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ベクトル

$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$の張る平行四辺形の面積

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 右手系

$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

$(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

$(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\times\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\times\mathbf{b}+\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}$

二重線型性

$$\boxed{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$$

$$\{(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\times\mathbf{b}\}\cdot\mathbf{c}$$
$$= V(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})$$
$$= V(\mathbf{a}_1,\mathbf{b},\mathbf{c})+V(\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})$$
$$=(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}+(\mathbf{a}_2\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$

$$=\{\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}+\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}\}\cdot\mathbf{c}$$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{y}$$

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\mathbf{c} = 0$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{x}-\mathbf{y}$$

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0$$

$\times \mathbb{e}_2 = \mathbb{e}_3$

$\times \mathbb{e}_1 = -\mathbb{e}_3$

$\times \mathbb{e}_3 = \mathbb{e}_1$

$\times \mathbb{e}_2 = -\mathbb{e}_1$

$\mathbb{e}_1 = \mathbb{e}_2$

$\mathbb{e}_3 = -\mathbb{e}_2$

$\times \mathbb{e}_i = 0$

$(i = 1, 2, 3)$

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \underline{a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3}$$

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \underline{b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2 + b_3\mathbb{e}_3}$$

$$\mathbb{a} \times \mathbb{b} = a_1 b \quad \mathbb{e}_2 \quad -\mathbb{e}_3 \quad a_2 b_1 \, \mathbb{e}_2 \times \mathbb{e}_1$$

$$+ a_1 \quad \mathbb{e}_3 \times \mathbb{e}_1 \quad \mathbb{e}_2$$

$$+ a_2 \quad \mathbb{e}_3 \times \mathbb{e}_2$$

$$-\mathbb{e}_1$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbb{e}_3$$

$$+ (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbb{e}_2$$

$$+ (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbb{e}_1$$

$$\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

解析的な

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$