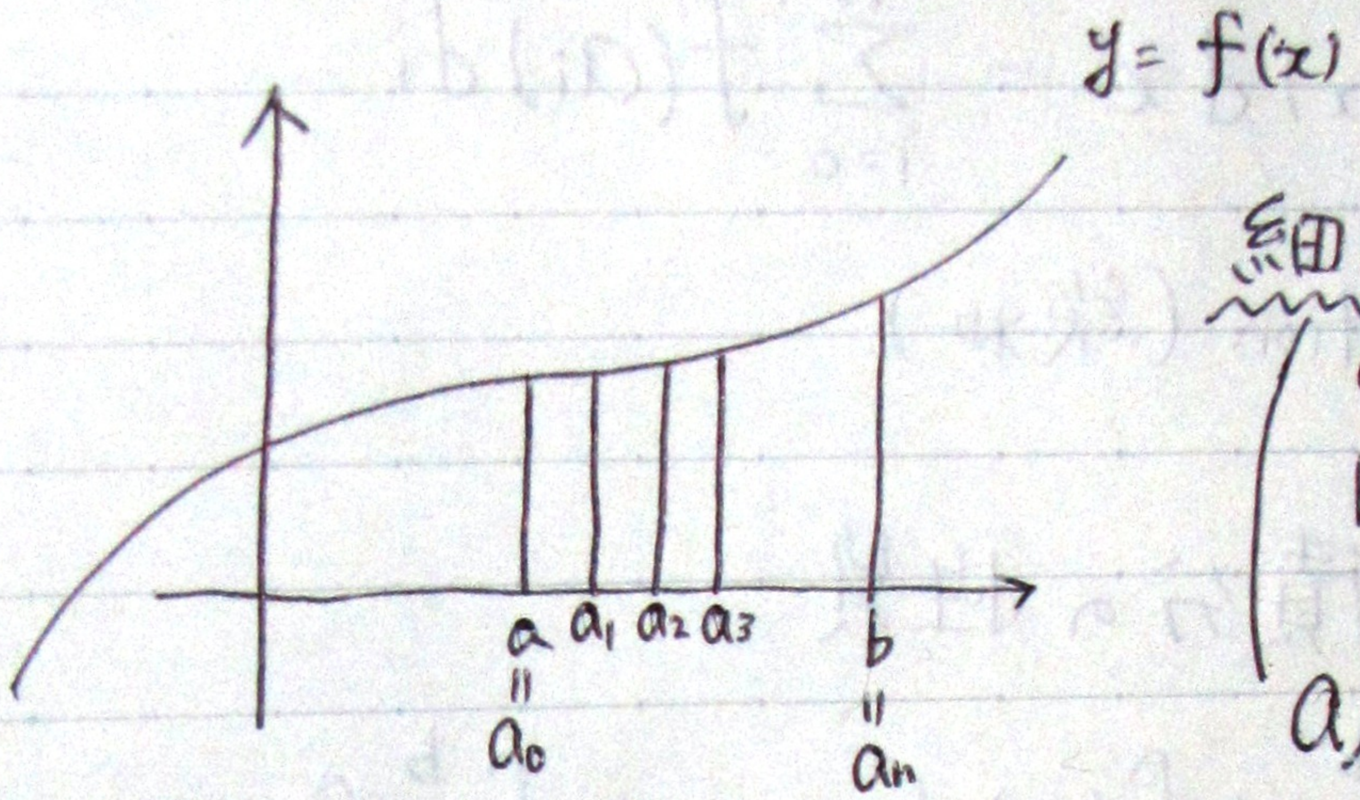
微積分（14コマ目）

定積分

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\int_a^b f(x)\,dx$



細かく分割

$a = a_0$

$b = a_n$

$a_{i+1} - a_i \in D$
$\quad = d_i$ とおく。

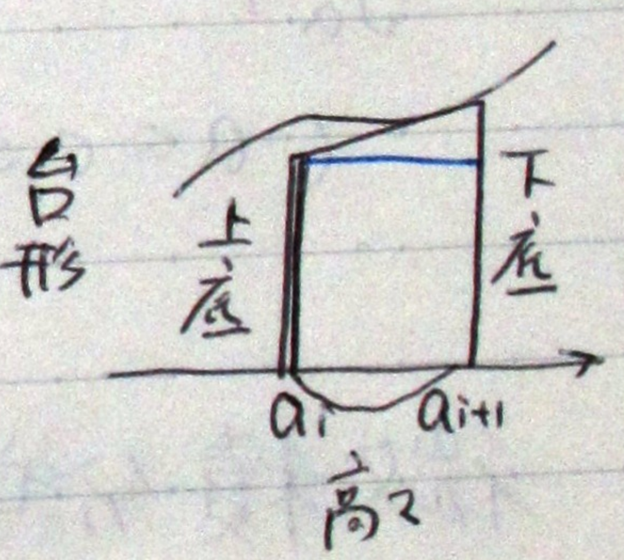
$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\,d_i}$$

$d \in D$

$f(x+d) = f(x) + f'(x) \cdot d$

線型

台形の面積 ←



$\frac{1}{2}$（上底 + 下底）× 高さ

$$\frac{\{f(a_i) + f(a_i + d_i)\} \times d_i}{2}$$

$$= \frac{\{f(a_i) + f(a_i) + f'(a_i)d_i\} \times d_i}{2}$$

$$= \frac{(2f(a_i) + f'(a_i)d_i)\,d_i}{2}$$

$$= f(a_i)\,d_i$$

長方形の面積になる

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\,d_i$$

Summation (総和)

定積分の性質

(1) $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

(2) $\int_a^b \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$

$(a \leq c \leq b)$

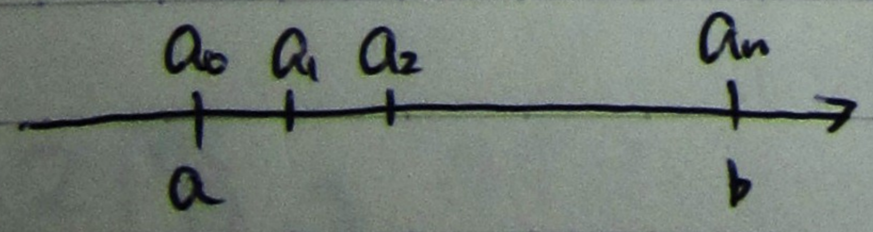
微積分学の基本定理

$F' = f \qquad F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\,d_i$$

$$\boxed{f(a_i)\,d_i = F(\underbrace{a_i + d_i}_{a_{i+1}}) - F(a_i)}$$

↑ 微分の定義の式



$a_{i+1} - a_i = d_i \in D$

$\vdots$

$f(a_{i-1})\,d_{i-1} = F(\cancel{a_i}) - F(a_{i-1})$

$f(a_i)\,d_i = F(\cancel{a_{i+1}}) - F(\cancel{a_i})$

$f(a_{i+1})\,d_{i+1} = F(a_{i+2}) - F(\cancel{a_{i+1}})$

$\vdots$

左辺の総和 $\int_a^b f(x)\,dx$

$\parallel$

右辺の総和 $F(a_n) - F(a_0)$

$= F(b) - F(a$

ベクトル解析

Kepler → Newton ← Galileo

17c Newton

力学 — 微積分学

19c 電磁気学 : 静電気, 雷

Farady

Maxwell

方程式

電場 ⇄ 磁場

電磁波

speed は光の speed

原子

電磁気学をつくるのにベクトル解析が必要となった。

3次元

関数

スカラー場 … 各点に温度を対応させる
関数

ベクトル場

各点に向きと大きさを対応させる
ベクトル

φ スカラー場

$\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{空間}} \to \mathbb{R}$

・微分

$\varphi'(x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線型写像

行列 1×3

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\, x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x)\, x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x)\, x_3$$

$$x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) \end{pmatrix}$$

ベクトル場

grad φ

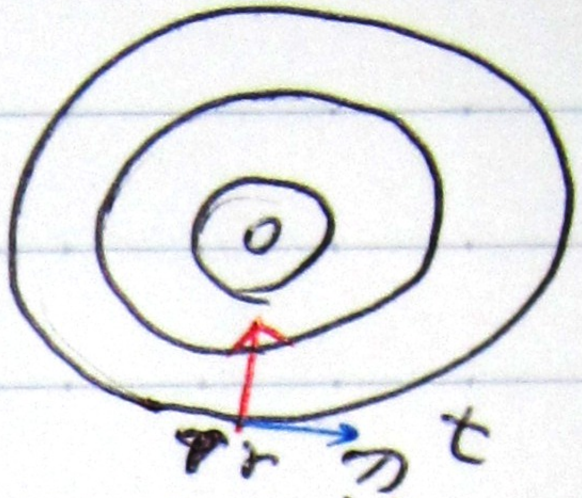
grad : スカラー場 → ベクトル場

gradient
勾配

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 高さ

等高線に沿って動く曲線

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$$



$\gamma: [a.b] \to \mathbb{R}^2$

パラメータ γ_1 γ_2

$\varphi(\gamma(t)) =$ 一定

$[a.b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$

微分（合成関数の微分）

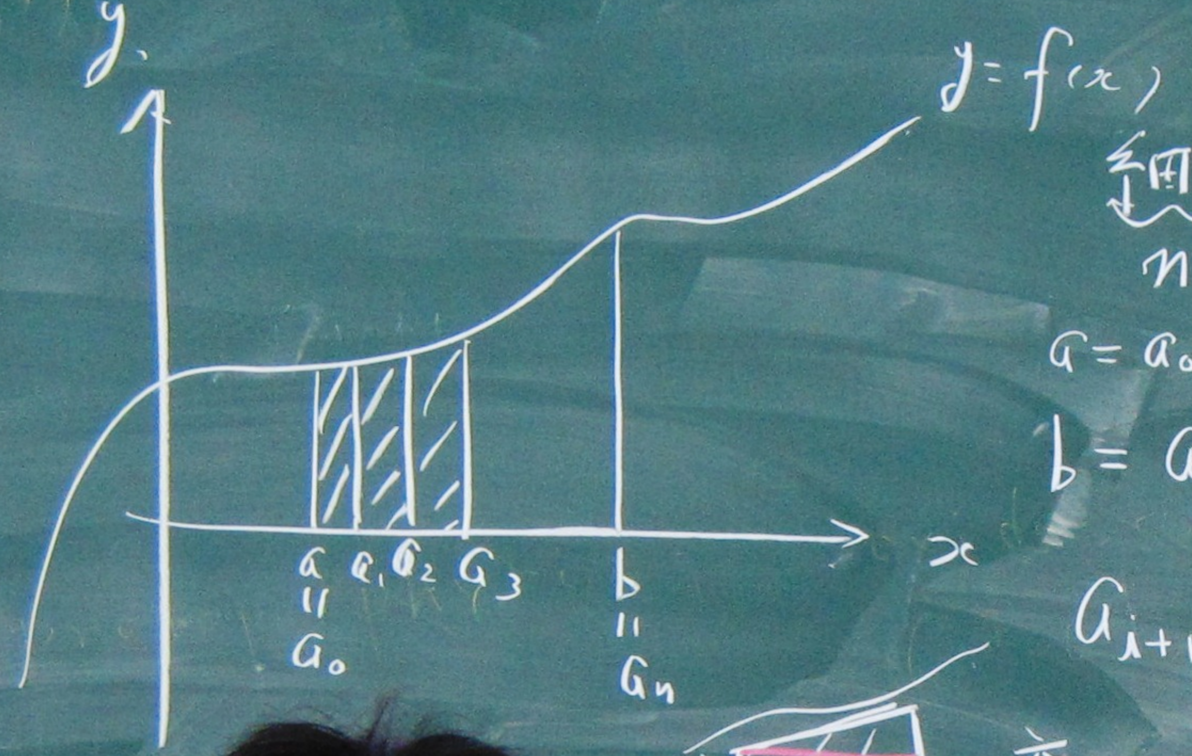
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix}$$ 接線の向き

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\gamma_1' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\gamma_2' = 0$$

定積分

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

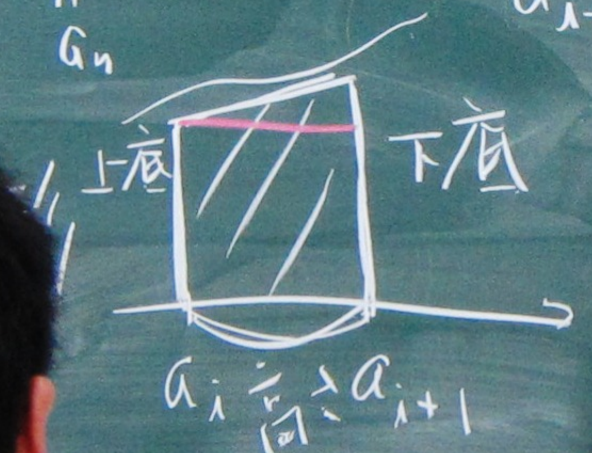


細かく分割
n個

$a = a_0$

$b = a_n$

$a_{i+1} - a_i \in D$
$\shortparallel$
d_i



$$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\,d_i \qquad d \in D$$

$$f(x+d) = f(x) + f'(x)\,d$$

線型

台形の面積

$$\frac{1}{2}(\text{上底}+\text{下底}) \times \text{高さ}$$

$$\frac{\{f(a_i) + f(a_i + d_i)\} \times d_i}{2}$$

$$= \frac{\{f(a_i) + f(a_i) + f'(a_i)d_i\} \times d_i}{2}$$

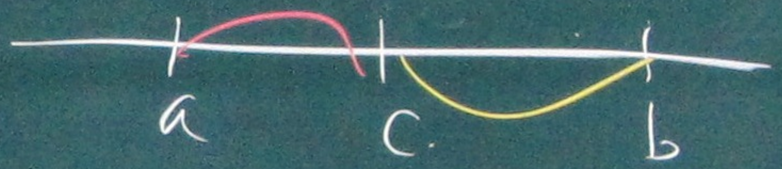
$$= \frac{(2f(a_i) + f'(a_i)d_i)d_i}{2}$$

$$= f(a_i)\,d_i$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\,d_i \qquad a \le c \le b$$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Summation (総和)



$\alpha \in \mathbb{R}$

定積分の性質

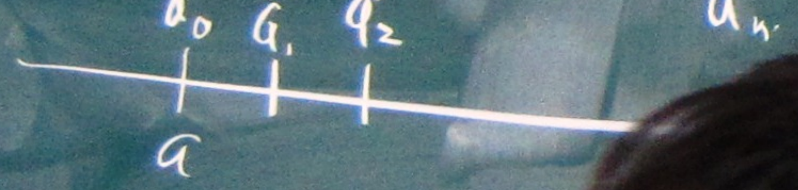
(1) $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

(2) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

微積分学の基本定理

$F' = f \qquad F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



$a_{i+1} - a_i = d_i \in D$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\,d_i$$

$$\boxed{f(a_i)\,d_i = F(\underbrace{a_i + d_i}_{a_{i+1}}) - F(a_i)}$$

微分の定義の式

$0 \qquad - F(a_0)$

$\qquad\qquad\; \| $

$\qquad\qquad F(a)$

$$f(a_{i-1})\,d_{i-1} = F(\cancel{a_i}) - F(a_{i-1})$$

$$f(a_i)\,d_i = F(\cancel{a_{i+1}}) - F(\cancel{a_i})$$

$$f(a_{i+1})\,d_{i+1} = F(a_{i+2}) - F(\cancel{a_{i+1}})$$

左辺の総和

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \begin{array}{c} F(a_n) - F(a_{n-1}) \\ \| \\ F(b) \\ \hline F(b) - F(a) \end{array}$$

ベクトル解析

Kepler Galileo

17C Newton

力学 ― 微積分学

雷

19C 電磁気学 静電気

Faraday Maxwell

方程式 ― ベクトル解析

電場 → 磁場

光

←

電磁波

speed

原子

3次元

関数

等圧線

スカラー場

ベクトル場

向きと大きさ

ベクトル

温度

気圧

高さ

φ スカラー場

$\varphi: \underset{\text{空間}}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \mathbb{R}$

(x, y, z)

行列

1×3

3×1

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\, x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x)\, x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, x_3$

・微分

$\varphi'(x) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線型写像

$x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) \end{pmatrix}$

勾配

gradient

ベクトル場

grad φ

grad　スカラー場

↓

ベクトル場

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 高さ

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

等高線に沿って動く曲線 γ

$$\gamma : \underset{\ni t}{[a,b]} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

パラメーター

γ_1

γ_2

$\varphi(\gamma(t)) =$ 一定 $[a,b] \to \mathbb{R}$

微分（合成関数の微分）

$$\overset{grad}{\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix}} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix}$$

接線の向き

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \gamma_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \gamma_2' = 0$$