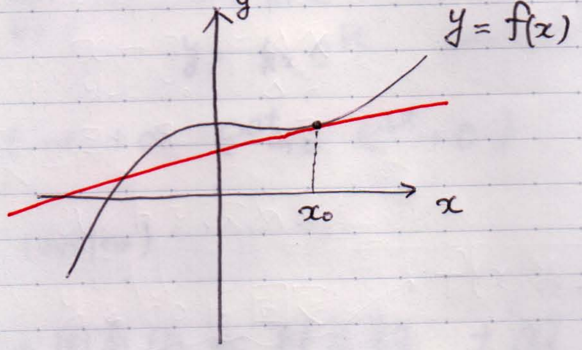
# 微積分　2学期　1コマ目

微分の基本的な考え方(哲学)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$




グラフは一般に曲がっている
↓
微分の基本的な考え方
では曲がっているのはイヤ
↓
まっすぐなものにおきかえよう

2通りの考え方

① 19C以降
(現在の高校でのorthodox)

$$f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

平均

$h \to 0$　接線に近づく
　　　　〃　になることはない

② 17C　Newton, Leibniz
18C　Euler (オイラー)

$$h f'(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$$

hが十分小さければこの式は成立つ

$$h^2 = 0$$

一学期は一変数の関数を扱った

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$n=1$ の場合 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$m = 3$ $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

$f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$n \geq 2$

$n = 2$ $m = 1$

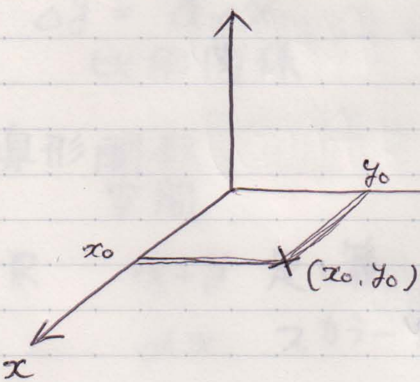
$(x, y)$ $z$

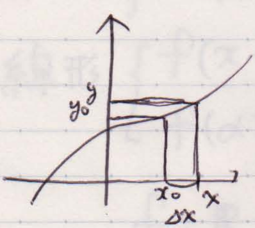
グラフ $z = f(x, y)$

今度はまっすぐなものは

接平面

になる




$y - y_0 = \Delta y$

$\Delta x = x - x_0$

接線では、$\Delta y = f'(x_0)\Delta x$

比例関係（単位の変換）

$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$ 平面の式
（aとbは定数）

$(x_0, y_0)$ $f(x_0, y_0) = z_0$

$x - x_0 = \Delta x$
$y - y_0 = \Delta y$
$z - z_0 = \Delta z$

aとbを決める！

yを$y_0$に固定 → $f(x, y_0)$

$y = y_0$ 空間では平面，xz平面に平行

すると $\Delta y \to 0$

$\Delta z = a\Delta x$

ふくさを $y = y_0$ で切る

切り口

$z = f(x, y_0)$ の graph

偏微分

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

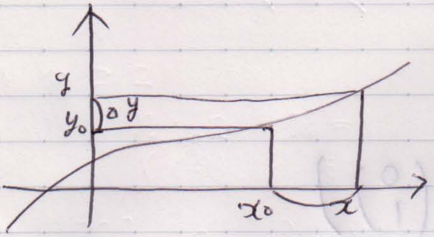
$x = x_0$ yzに平行な面で切る

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$m = 1$
$n = 3$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$　　$3+1=4$ 次元となるので
graph をかけない




$\Delta y = a \Delta x$
比例関係

線形関数
空間

$\mathbb{R}$　$x+y$ 足し算
　$\alpha x$ スカラー倍

$f: X \to Y$　　$X, Y$：線形空間

線形 $\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$　線型写像

$y = f(x) = f(x \cdot 1) = x \underbrace{f(1)}_{a}$　　比例関係である

$\Delta x \to \Delta y$

線形写像でおきかえたとみる

比例関数

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 線形写像

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \cancel{= f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) +}$$

$$= f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= x\underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{a} + y\underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{b}$$

$$\underset{1\times 2}{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{1\times 1}{ax+by}$$

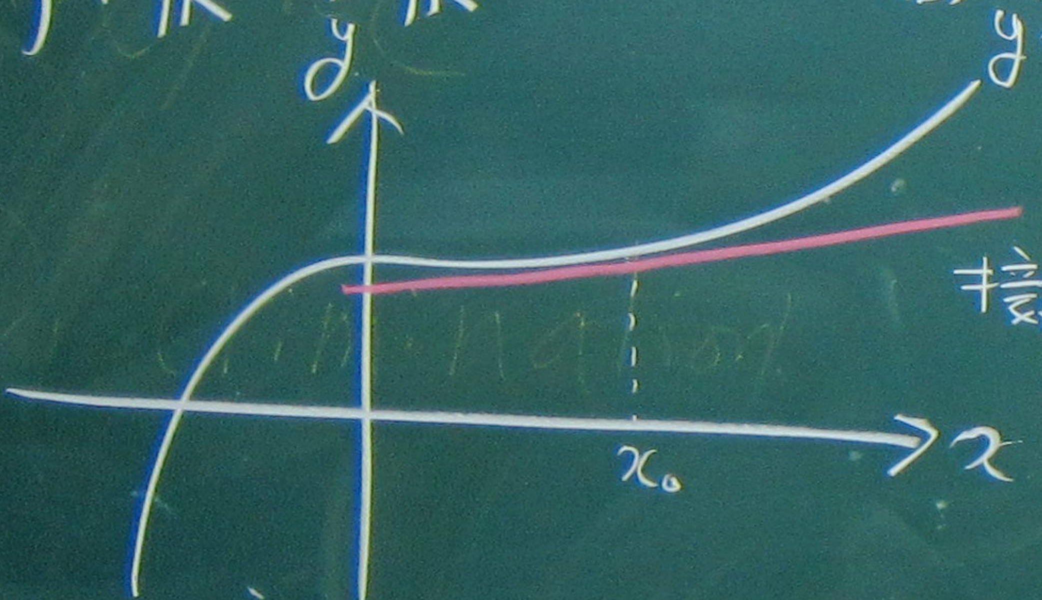
真っすぐなもの ― 線型関数

代数的

# 微分の基本的な考え方（哲学）

グラフ
曲がってるはイヤ

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$




まっすぐ
真直なものに
接線
おきかえよう

$h \to 0$

接線に近づく
になることはない

1変数の関数

2通りの考え方

19C以降　$f'(a) = \_\_\_$

（現在の高校での
orthodox）

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

平均　　極限

定義

$(fg)' = f'g + fg'$ (Leibniz)

17C Newton / Leibniz

18C Euler（オイラー）

$h f'(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$　ウソ

hが十分小さければ
この式は成立つ

$h^2 = 0$

implicit

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$m=3$

$n=1$の場合　$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$n \geq 2$　$(x, y)$　$z$

$n=2$　$m=1$

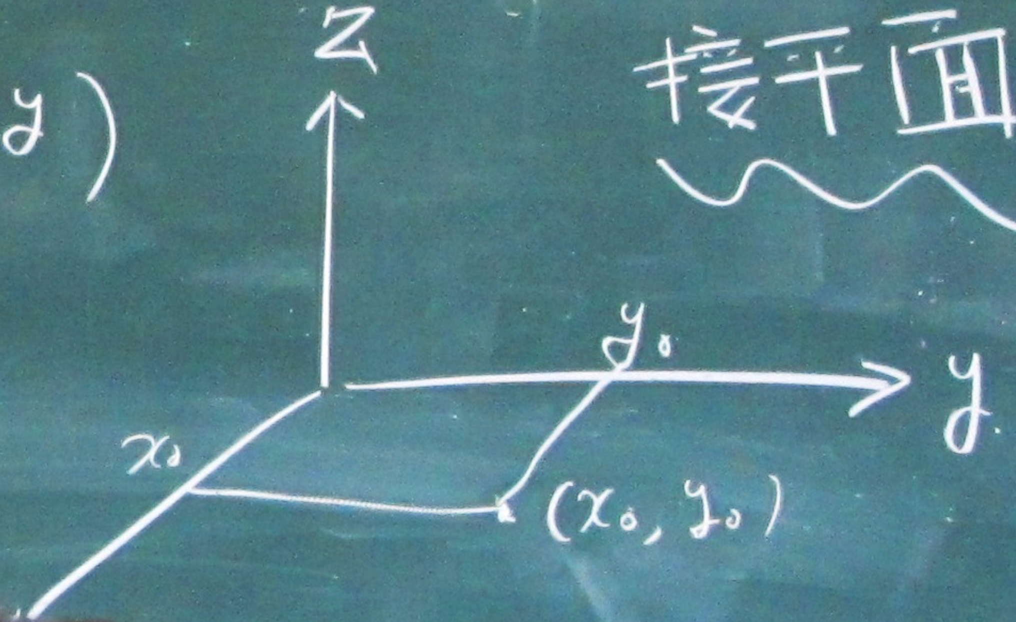
グラフ

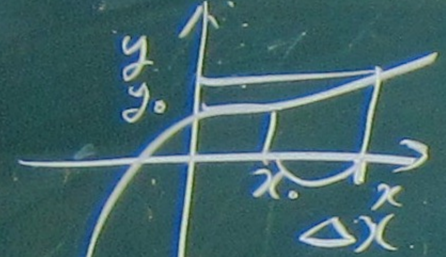
$z = f(x, y)$

曲面

3次元　plot

接平面






$y - y_0 = \Delta y$

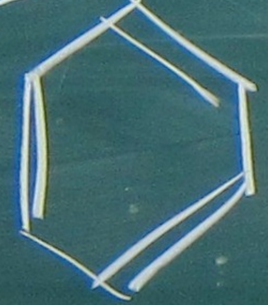
$\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x$

比例関係

単位の変換

里 4km



$\Delta z = a\,\Delta x + b\,\underbrace{\Delta y}_{=0}$ 平面の式

(aとbは定数)

$(x_0, y_0)$ $f(x_0, y_0) = z_0$

$x - x_0 = \Delta x$

$y - y_0 = \Delta y$

$z - z_0 = \Delta z$

aとbを決める!

$x = x_0$

yzに平行な面

$f(x, y_0)$

yを$y_0$に固定

$y = y_0$ 平面

xz平面に平行

$\int_a^b$

$\exists a$ Existence (存在)

$\Delta z = a\,\Delta x$

切り口 $\forall x$ All

$\int$ $z = f(x, y_0)$ のgraph

偏微分

$x_0$ $y_0$

Summation (総和)

$a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

$b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$m=1$

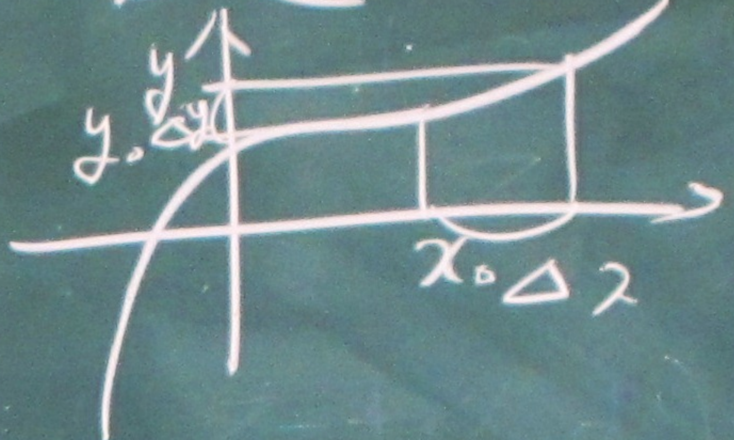
$n=3$

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

graph をかけない

$3+1=4$次元

1変数




$\Delta y = a \quad \Delta x$

比例関係

線形関数
空間

$\mathbb{R}$ $x+y$ 足し算

$\alpha x$ スカラー倍

$f: \underset{\text{線型}}{X \longrightarrow Y}$ $X, Y$: 線形空間

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 線型写像

$y = f(x) = f(x \cdot 1) = x \underbrace{f(1)}_{a}$

比例

比例関数

$\Delta x \to \Delta y$

線型写像でおきかえた

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 線型写像

$\begin{array}{ccc} 1\times 2 & 2\times 1 & 1\times 1 \\ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = \end{array}$

$f(x, y)$ 真っすぐなもの — 線型関数

$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ 代数的

$= f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x\underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{a} + y\underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{b}$