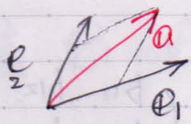
微積分（10コマ目）

基底（平面ベクトル）

同一直線上にない2個のベクトル



$$\mathbb{a} = a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2$$
$$(a_1, a_2 \in \mathbb{R})$$

番地

基底を取るということは座標をとるということ

直交座標

$$\mathbb{e}_1 \perp \mathbb{e}_2$$

$$|\mathbb{e}_1| = |\mathbb{e}_2| = 1$$

基底はいくつもある！

$\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2$ 基底

$\mathbb{f}_1, \mathbb{f}_2$ 基底

- $\mathbb{f}_1 = p_{11} \mathbb{e}_1 + p_{21} \mathbb{e}_2$

  $\mathbb{f}_2 = p_{12} \mathbb{e}_1 + p_{22} \mathbb{e}_2$

  $[\mathbb{f}_1, \mathbb{f}_2] = [\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2] P$ 一意的に決まる

  $$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{e}_1 = q_{11} \mathbb{f}_1 + q_{21} \mathbb{f}_2$

  $\mathbb{e}_2 = q_{12} \mathbb{f}_1 + q_{22} \mathbb{f}_2$

  $[\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2] = [\mathbb{f}_1, \mathbb{f}_2] Q$

  $$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

$$[\mathbb{f}_1, \mathbb{f}_2] = [\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2] P$$
$$= ([\mathbb{f}_1, \mathbb{f}_2] Q) P$$
$$= [\mathbb{f}_1, \mathbb{f}_2] QP$$

$\mathbb{f}_1 = 1\mathbb{f}_1 + 0\mathbb{f}_2$ と書くしかない
$\mathbb{f}_2 = 0\mathbb{f}_1 + 1\mathbb{f}_2$

よって $QP = E$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \right\}$

$\mathbb{f}_1, \mathbb{f}_2$ と $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2$ の立場を逆にすると $PQ = E$

P も Q も正則行列で
逆行列を持つ行列

P は Q の逆行列, Q は P の逆行列

$P = Q^{-1}$, $Q = P^{-1}$

P を基底 $(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)$ を基底 $(\mathbb{f}_1, \mathbb{f}_2)$ に変換する行列
Q を 〃 $(\mathbb{f}_1, \mathbb{f}_2)$ 〃 $(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)$ 〃
という。

任意のベクトル $\mathbb{x}$

一意的

$$\mathbb{x} = [\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$
$$= x_1 \mathbb{e}_1 + x_2 \mathbb{e}_2$$

$$\mathbb{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

番地

線型写像 (linear mapping)

平面のベクトル $\xrightarrow{\text{写像}\varphi}$ 平面のベクトル

$$\begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

このようになるとき線型写像という。

(e_1, e_2) 基底を固定

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2)$$
$$= x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2)$$

線型写像 φ は
$\varphi(e_1), \varphi(e_2)$ だけで決まる

$$\left[\varphi(e_1), \varphi(e_2)\right] = [e_1, e_2] \overset{2\times 2}{A}$$ 一意的

$$\varphi(e_1) = a_{11} e_1 + a_{21} e_2$$
$$\varphi(e_2) = a_{12} e_1 + a_{22} e_2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

線型写像 $\varphi \leftrightarrow$ 2×2 の行列 A

A を線型写像 φ の基底 (e_1, e_2) を固定した場合の行列表現と言う。

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$

$x = [e_1, e_2]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\varphi(x) = \underline{[\varphi(e_1), \varphi(e_2)]}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{[e_1, e_2]} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

基底 $[e_1, e_2)$ を固定すると

$x \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は線型写像 φ で

$\varphi(x) \longleftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ なるベクトルへ移る

基底 (e_1, e_2) が基底 (f_1, f_2) に変更されればどうなるか？

$$\boxed{[f_1, f_2] = [e_1, e_2] P}$$

$$[e_1, e_2] = [f_1, f_2] P^{-1}$$

$$[\varphi(f_1), \varphi(f_2)] = [\varphi(e_1), \varphi(e_2)] P$$

$$= [e_1, e_2] AP$$

$$= [f_1, f_2] P^{-1}AP$$

← 基底 (f_1, f_2) での φ の行列表現

お友達

$A \sim P^{-1}AP$

相似

線型座標のとりかえ → なるべく簡単にしよう.

Jardan の標準形

行列 A　異なる2つの実数の固有値 a, b

$$A \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

微分方程式を解く

固有値　　　解かなくても

$a<0$　　$x = k_1 e^{at} \longrightarrow 0$

$b<0$　　$y = k_2 e^{bt} \longrightarrow 0$

時間がたてば原点へむかう

$(t \to +\infty \quad e^{at} \to 0 \quad e^{bt} \to 0)$

系 (system)

Aの固有値が純虚数 $\pm ai$ (aは実数)

$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$

解は周期解であることがわかる

Report

次の2次の微分方程式を解きなさい　来週月よう日しめきり

(1) $x'' + 4x = 0 \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0$

(2) $x'' - 3x' + 2x = 0 \quad x(1) = 0,\ x'(1) = -1$

(3) $x'' - x' - 6x = 0$

(4) $x'' + x' + x = 0$

参考　$x'' + ax' + bx = 0$

$x' = y$

$y' = -ay - bx$　に変換される

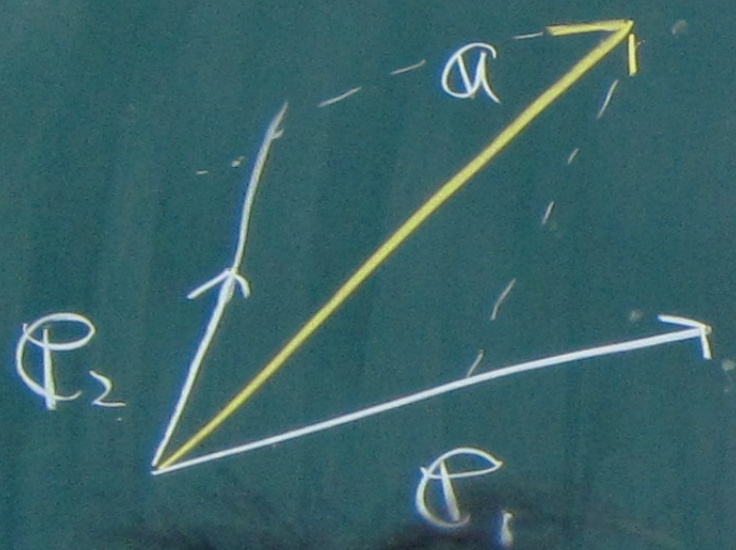
2学期は多変数の関数を扱う.

面のベクトル 形

基底 — 標 型 座標

同一直線上にない

2個のベクトル



一意的に書ける

$a = a_1 e_1 + a_2 e_2$

$(a_1, a_2 \in \mathbb{R})$

番地

直交座標

$e_1 \perp e_2$

$|e_1| = |e_2| = 1$

基底はいくつもある!

e_1, e_2 基底

f_1, f_2 基底

$f_1 = p_{11} e_1 + p_{21} e_2$

$f_2 = p_{12} e_1 + p_{22} e_2$

$e_1 = q_{11} f_1 + q_{21} f_2$

$e_2 = q_{12} f_1 + q_{22} f_2$

$[f_1, f_2] = [e_1, e_2] \overset{2\times 2}{P}$

$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$

一意的に決まる

$[e_1, e_2] = [f_1, f_2] \overset{2\times 2}{Q}$

$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$

$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \underline{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}\, P$

$= ([\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]\, Q)\, P$

$= [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]\, \underline{QP}$

$\mathbf{f}_1 = 1\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2$

$\mathbf{f}_2 = 0\mathbf{f}_1 + 1\mathbf{f}_2$

単位行列

$QP = E$

$PQ = E$

PもQも正則行列で

逆行列を持つ行列

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ PはQの逆行列

QはPの逆行列

$P = Q^{-1}$ $Q = P^{-1}$

Pを基底$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$を基底$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$に変換する行列

Qを $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

と言う

一意的

$\mathbf{x} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$

$= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$

$\mathbf{x} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 番地

線型写像 (linear mapping)

平面のベクトル $\xrightarrow{\text{写像 } \varphi}$ 平面のベクトル

$$\begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y) \\ \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

(e_1, e_2) 基底

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2)$$
$$= x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2)$$

線型写像 φ は

$\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ だけで

決まる

$$[\varphi(e_1), \varphi(e_2)] = [e_1, e_2]\underset{\text{一意的}}{\overset{2\times 2}{A}}$$

$$\varphi(e_1) = a_{11} e_1 + a_{21} e_2$$
$$\varphi(e_2) = a_{12} e_1 + a_{22} e_2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

線型写像 $\varphi \longleftrightarrow$ 2×2の行列 A

A を φ の基底 (e_1, e_2) を固定した

線型写像

場合の行列表現と言う

$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$

$\mathbf{x} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \underbrace{[\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2)]}_{}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \underline{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

基底$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$を固定すると

座標写像

$\mathbf{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は φ で

$\varphi(\mathbf{x}) \leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ なる

ベクトルへ移る

$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

基底$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$が基底$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$に変更されればどうなるか? φ A

$\boxed{[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]P}$

$\boxed{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]P^{-1}}$

$[\varphi(\mathbf{f}_1), \varphi(\mathbf{f}_2)] = [\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2)]P$

$= [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]AP = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]P^{-1}AP$ ← 基底$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$での$\varphi$の行列表現

$A \underset{\text{相似}}{\overset{\text{お友達}}{\sim}} P^{-1}AP$

標型 座標のとりかえ

Jordanの標準形

行列A 異なる2つの

実数の固有値 a, b

$A \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$

微分方程式を解く

解かなくても

$a < 0$
$b < 0$

$x = k_1 e^{at} \to 0$

$y = k_2 e^{bt} \to 0$

$t \to +\infty$

系 (system)

定性的

Aの固有値が純虚数 $\pm a i$ (aは実数)

$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$

周期解

次の2次の微分方程式を解きなさい

(1) $x'' + 4x = 0$ $\quad x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

(2) $x'' - 3x' + 2x = 0$

$x(1) = 0$

(3) $x'' - x' - 6x = 0$

(4) $x'' + x' + x = 0$

$x'' + ax' + bx = 0$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ay - bx \end{cases}$$