(´・ω・`)　(´;ω;`)

No. 微積分
Date H22 6 16

ベクトル（平面）
矢印 ↗ 足し算 ｝8つの法則 これを満たせば
スカラー倍 ｝公理 線型空間という

線型空間＋直積⇒線型空間
W　$W\times W$　$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$
(x, y)　$x, y\in W$　$\alpha(x, y)=(\alpha x, \alpha y)$
V^2 平面のベクトル全体
$\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\in V^2$　　$x_1\mathbb{e}_1+x_2\mathbb{e}_2$ 線型結合
$x_1, x_2\in\mathbb{R}$（実数）　<u>Notation</u>（記法

$$V^2\ni\mathbb{x}=(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Proposition（命題）→同一直線上に無い
$(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)$ が $\boxed{基底}$ ならば任意の $\mathbb{x}\in V^2$ に対してただ1個の
2次元列ベクトル $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ が決まって

$$\mathbb{x}=(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Prop
A を 2×2 の行列 $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ を列ベクトル、$(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)\in V^2\times V^2$

$$(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)\underbrace{\left(A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)}_{列ベクトル}=\underbrace{\left((\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)A\right)}_{\in V^2\times V^2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)A=(a_{11}\mathbb{e}_1+a_{21}\mathbb{e}_2, a_{12}\mathbb{e}_1+a_{22}\mathbb{e}_2)$$

$$\left((\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)A\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(a_{11}\mathbb{e}_1+a_{21}\mathbb{e}_2, a_{12}\mathbb{e}_1+a_{22}\mathbb{e}_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x_1\mathbb{e}_1+a_{21}x_1\mathbb{e}_2+a_{12}x_2\mathbb{e}_1+a_{22}x_2\mathbb{e}_2$$

$$(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)\left(A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)\ ..$$

$$=$$

Prop　　　　$V^2\times V^2$ 直積
2組のベクトルというイミ

宿 Ⅰ $(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)$ ~~が~~ は 基底
任意の $(\mathbb{f}_1, \mathbb{f}_2)\in V^2\times V^2$ に対して $\exists!$ 2×2 の行列 A が決まって
$(\mathbb{f}_1, \mathbb{f}_2)=(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)A$

題 Ⅱ $(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)\in V^2\times V^2$
A, B を 2×2 の行列
$\left((\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)A\right)B=(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)(AB)$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled × 36 lines

6 16

2つの基底

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\overset{2\times 2}{P} = \left((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)Q\right)P = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)(QP)$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)\overset{2\times 2}{Q} = \left((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)P\right)Q = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)(PQ)$$

$$\left.\begin{matrix} QP \\ PQ \end{matrix}\right\} E$$

線型写像 $\varphi: V^2 \to V^2$

$\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2))$ ← definition

命題

Ⅲ $\varphi\left((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

命題

Ⅳ $\varphi((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)A) = (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2))\overset{2\times 2}{A}$

しゅくだい Ⅲ と Ⅳ を証明せよ

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ を基底とする

$$\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2))A$$
$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\underline{A}$$

φ に対する基底 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ に関する行列

$$\varphi\left((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = ((\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\underbrace{A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$$

$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ も基底

$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\overset{2\times 2}{P}$

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)P^{-1}$

$$\varphi(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \varphi((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)P)$$
$$= (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2))P$$
$$= ((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)A)P$$
$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)(AP)$$
$$= ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)P^{-1})(AP)$$
$$= (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)(P^{-1}AP)$$

(´;ω;`)ブワッ

No.
Date 6 16

微分

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$n=1, m=2$ なら $f(x)=(f_1(x), f_2(x))$ 正負に分ける

$n=2, m=1$ なら偏微分

$f(x, y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

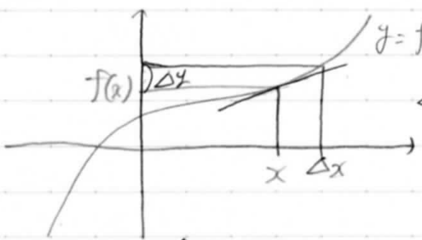
$\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, αx, $x = x \cdot 1$ 1次元線型空間

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 線型写像

$\varphi(x) = \varphi(x1) = x\underline{\varphi(1)}$

aは定数… $\boxed{\text{比例}}$

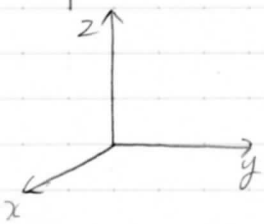
比例定数



$\Delta y = f(\Delta x)$

曲がっているのは嫌だから接線でおきかえる。

xでのfの微分係数＝比例定数

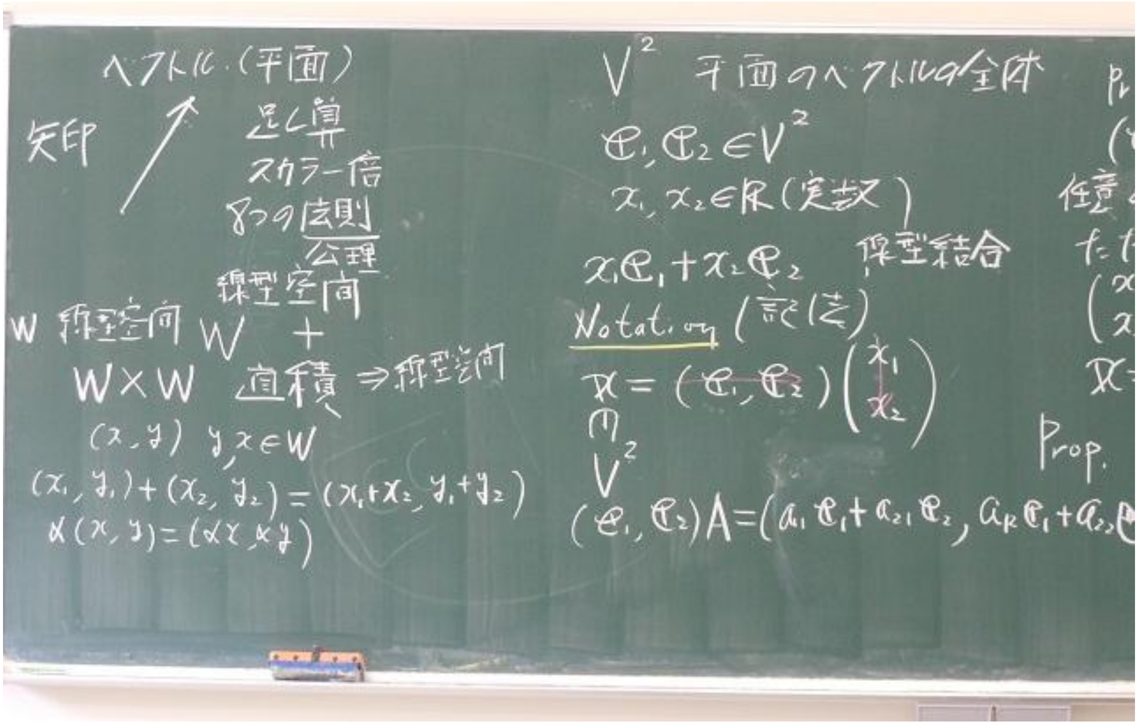


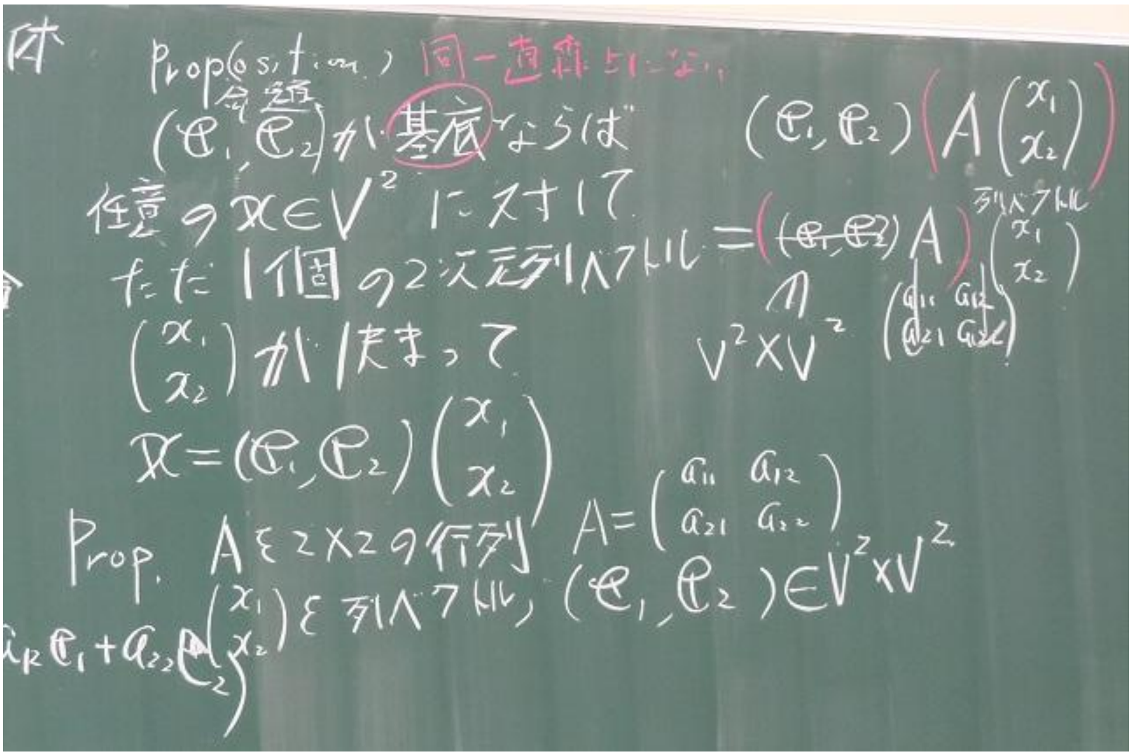
$z = f(x, y)$

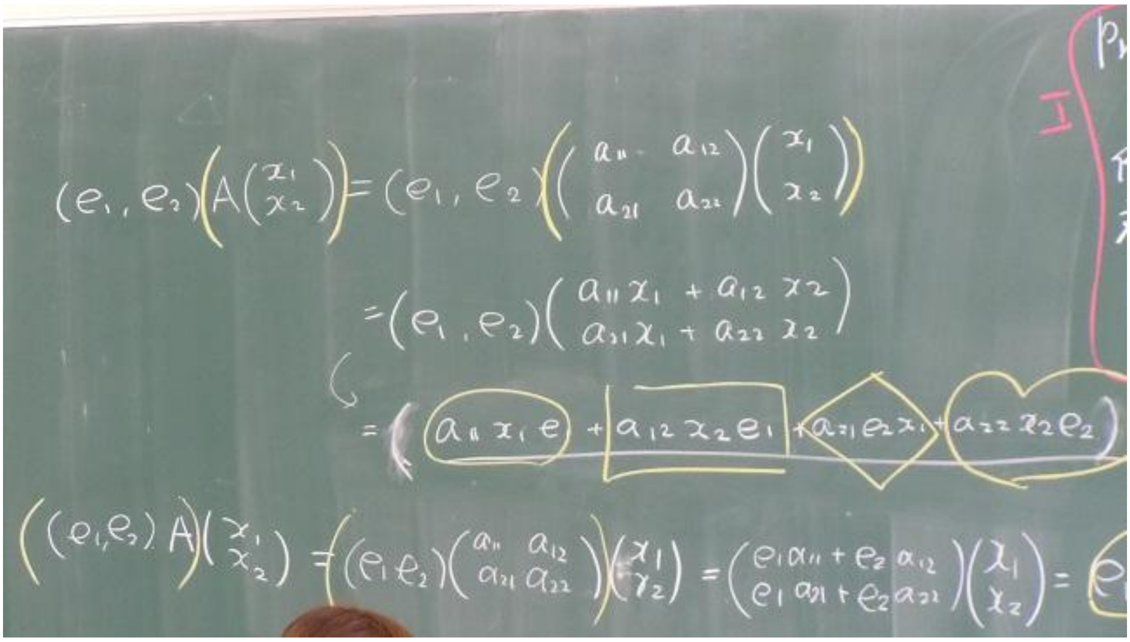
接平面

$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$

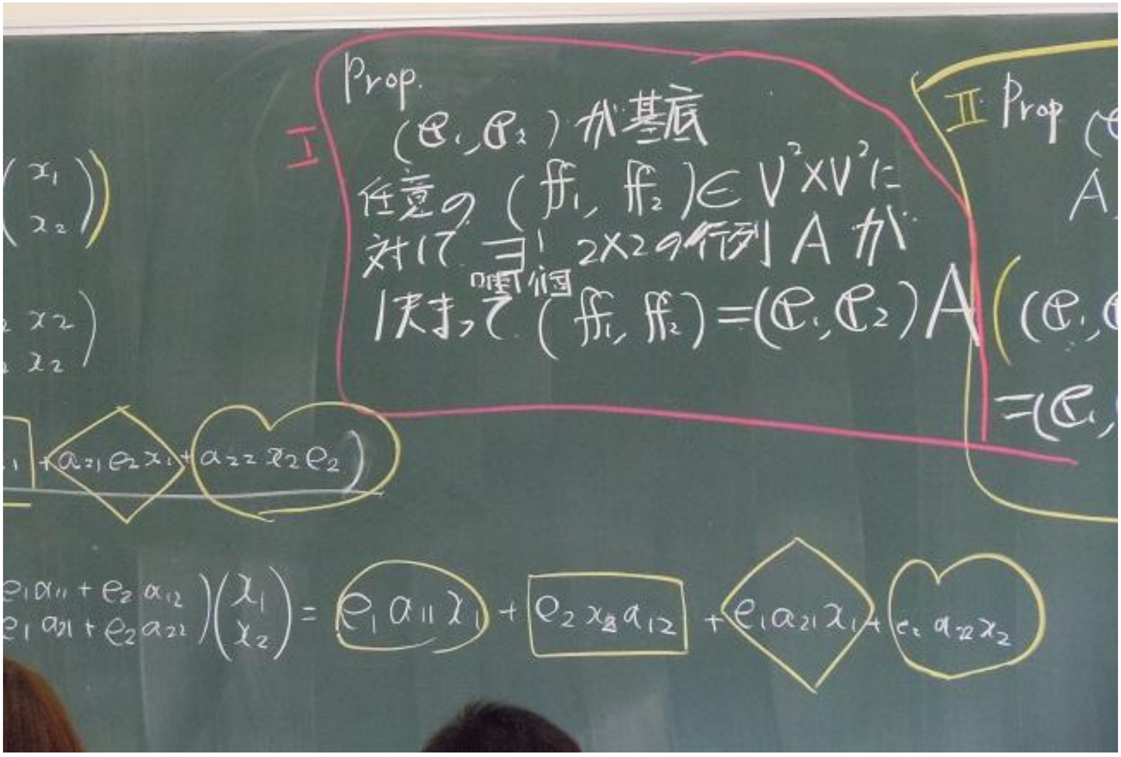
$\frac{\partial z}{\partial x}$ $\frac{\partial z}{\partial y}$ 偏微分


ベクトル(平面)
矢印
足し算
スカラー倍
8つの法則
公理
線型空間
W 線型空間 W +
$W \times W$ 直積 ⇒ 線型空間
(x, y) $y, x \in W$
$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$
$\alpha(x, y)=(\alpha x, \alpha y)$
V^2 平面のベクトルの全体
$e_1, e_2 \in V^2$
$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$(実数)
$x_1 e_1 + x_2 e_2$ 線型結合
Notation(記法)
$x = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$\in V^2$
$(e_1, e_2)A = (a_{11} e_1 + a_{21} e_2, a_{12} e_1 + a_{22} e_2$

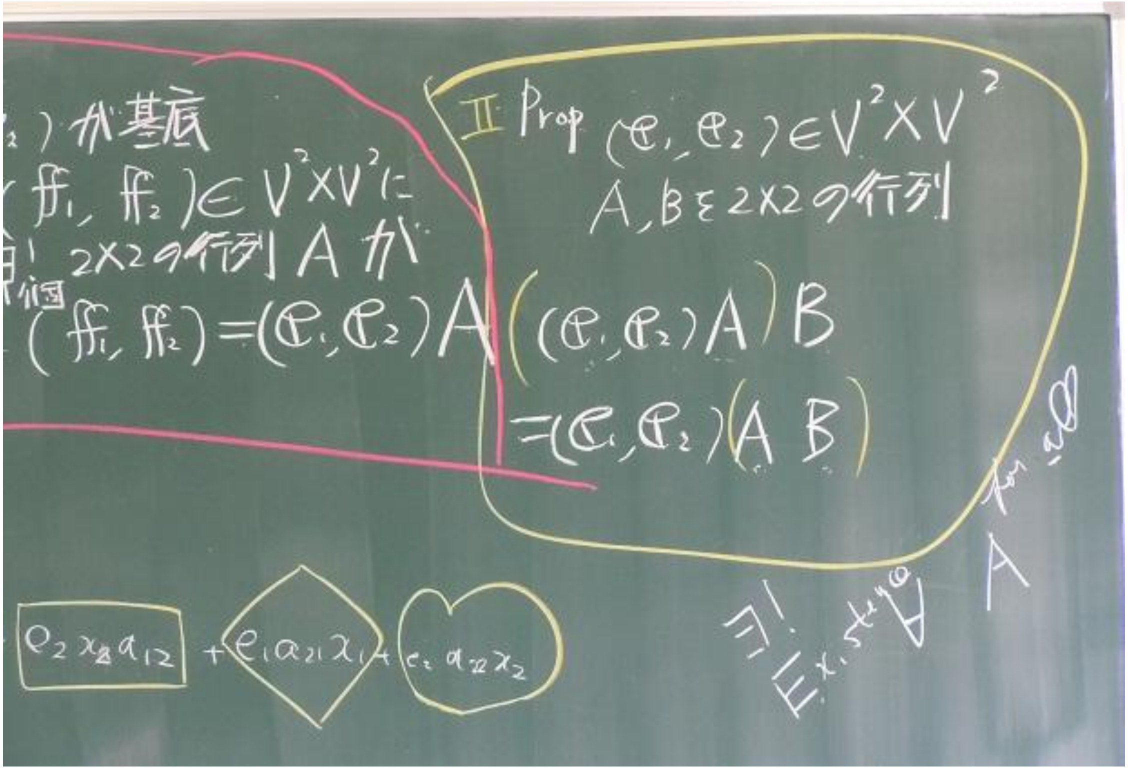

Proposition 命題 同一直線上にない
(e_1, e_2)が基底ならば
任意の$x \in V^2$に対して
ただ1個の2次元列ベクトル
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$が決まって
$x = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
Prop. Aを2×2の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$を列ベクトル, $(e_1, e_2) \in V^2 \times V^2$
$(e_1, e_2)\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \left((e_1, e_2)A\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
列ベクトル
$\in V^2 \times V^2$

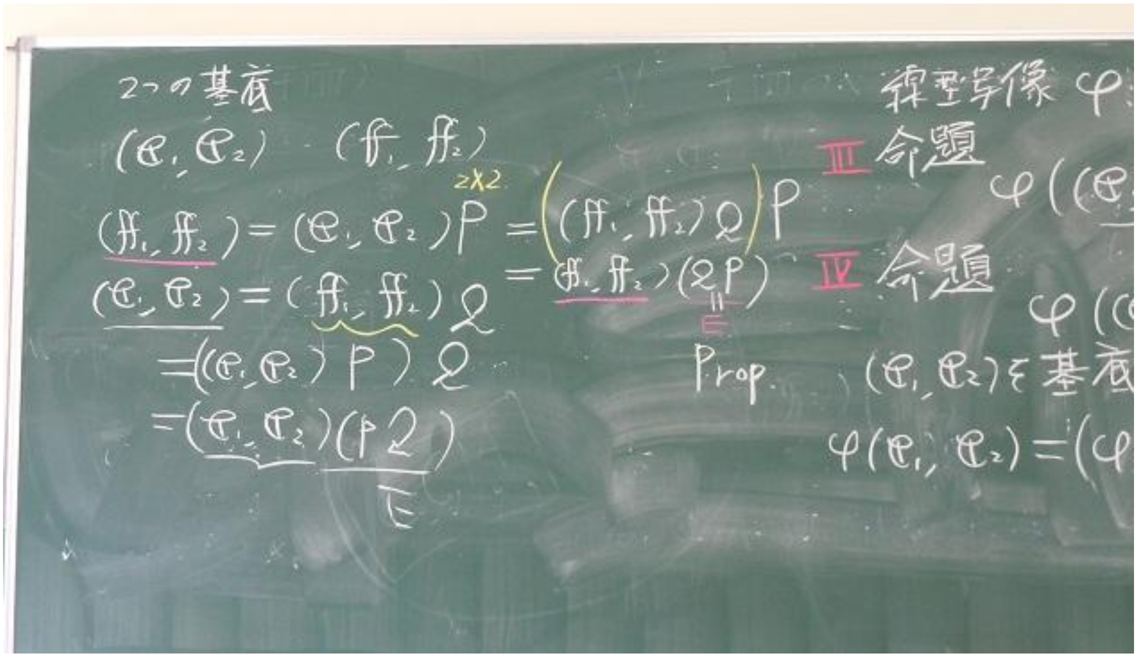


I
$(e_1, e_2)\left(A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = (e_1, e_2)\left(\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)$
$= (e_1, e_2)\begin{pmatrix}a_{11}x_1 + a_{12}x_2\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{pmatrix}$
$= (a_{11}x_1e + a_{12}x_2e_1 + a_{21}e_2x_1 + a_{22}x_2e_2)$
$((e_1,e_2)A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \left((e_1 e_2)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1a_{11}+e_2a_{12}\\ e_1a_{21}+e_2a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} =$



I
Prop.
(e_1, e_2) が基底
任意の $(f_1, f_2) \in V^2 \times V^2$ に
対して $\exists!$ 2×2の行列 A が
唯一個
決まって $(f_1, f_2) = (e_1, e_2)A$
II Prop
$\begin{pmatrix}e_1a_{11}+e_2a_{12}\\ e_1a_{21}+e_2a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = e_1a_{11}x_1 + e_2x_2a_{12} + e_1a_{21}x_1 + e_2a_{22}x_2$


$)$ が基底
$(f_1, f_2) \in V^2 \times V^2$ に
唯一個 2×2の行列 A が
$(f_1, f_2) = (e_1, e_2)A$
II Prop $(e_1, e_2) \in V^2 \times V^2$
A, B を 2×2の行列
$((e_1, e_2)A)B$
$= (e_1, e_2)(AB)$
$e_2 x_2 a_{12} + e_1 a_{21} x_1 + e_2 a_{22} x_2$
∃! Exactly A
for all A


2つの基底
(e_1, e_2) (f_1, f_2)
2×2
$(f_1, f_2) = (e_1, e_2)P = ((f_1, f_2)Q)P$
$= (f_1, f_2)(QP)$
$(e_1, e_2) = (f_1, f_2)Q$
$= ((e_1, e_2)P)Q$
$= (e_1, e_2)(PQ)$
E
Prop
線型写像 φ
III 命題
IV 命題
(e_1, e_2) を基底
$\varphi(e_1, e_2) = (\varphi$

線型写像 $\varphi: V^2 \to V^2$ $\quad \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2))$

III 命題

$$\varphi\left(\underline{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}\right) = (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

IV 命題

$$\varphi((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)A) = (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2))A$$

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$を基底とする

$$\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\underline{A}$$

φに対する基底$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$に関する行列

$$\varphi\left(\underbrace{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}\right)$$

$$= (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\underline{A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2)$$

$$= y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$$

$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$も基

$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) =$

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) =$

$\varphi($

$= (\varphi(\mathbf{e}$

$= ((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}$

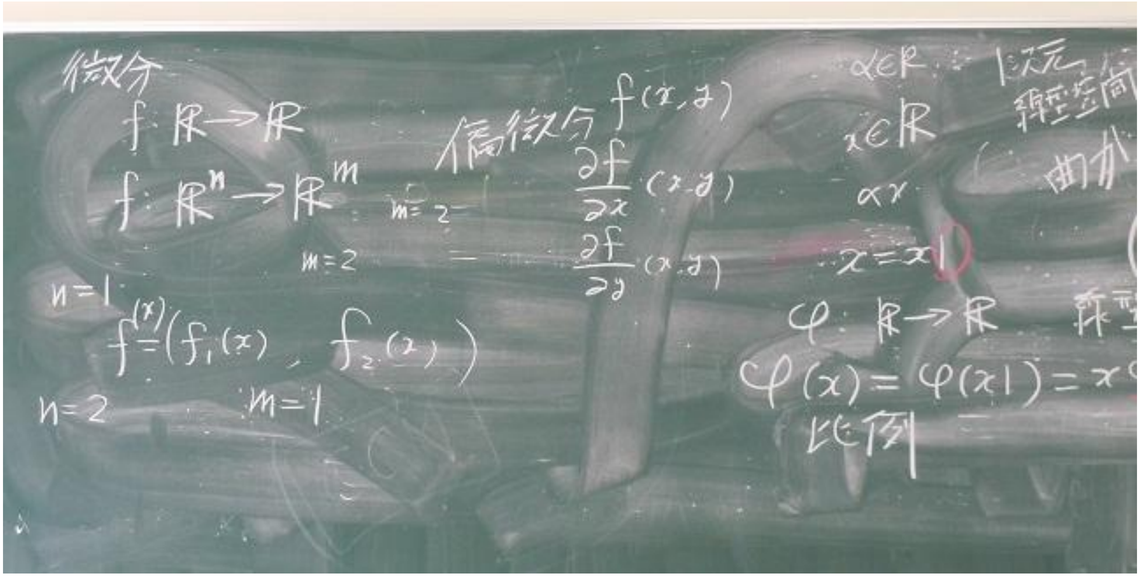
$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$

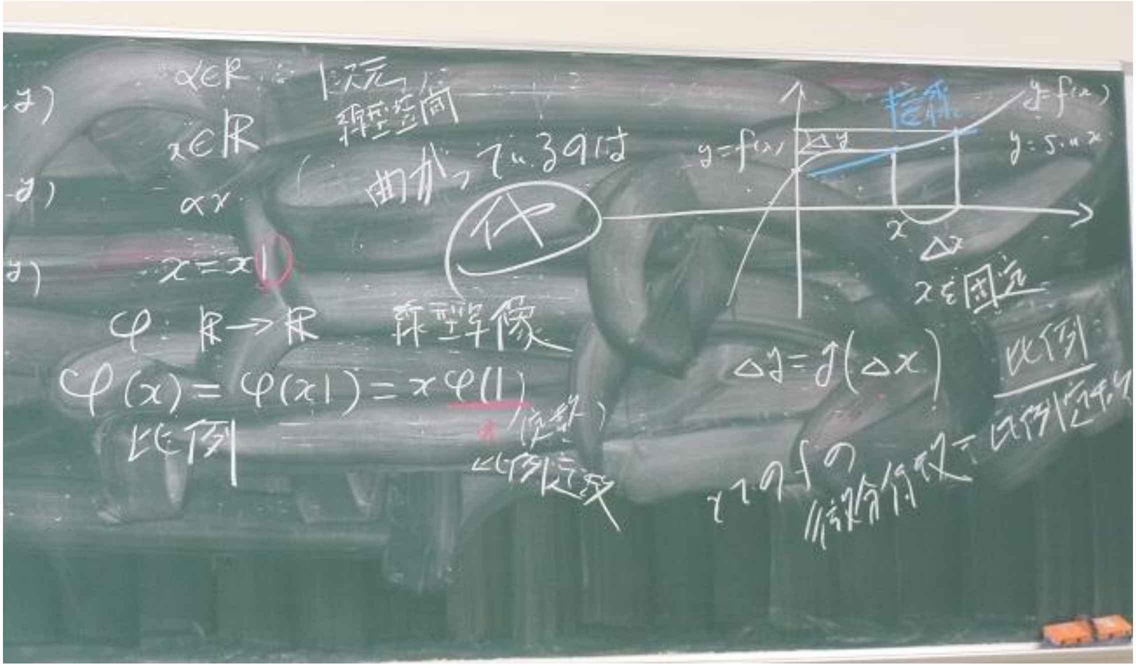
$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ も基底 $\quad 2\times 2$

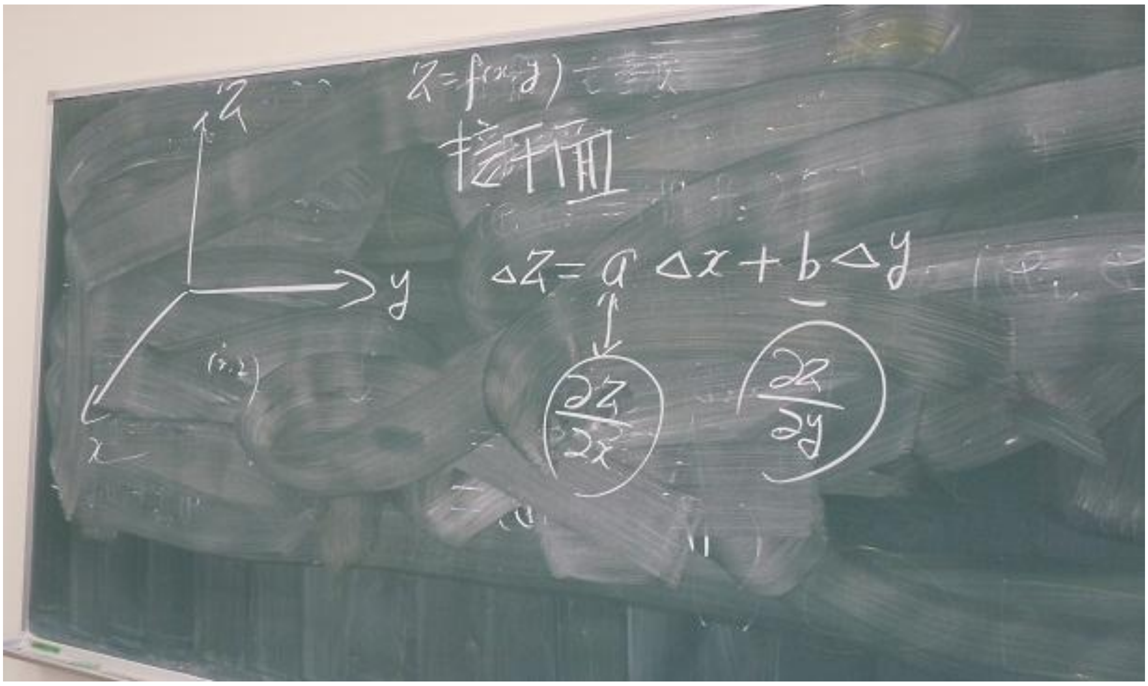
$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)P$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)P^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) &= \varphi((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)P) \\
&= (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2))P \\
&= ((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)A)P \\
&= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)(AP) \\
&= ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)P^{-1})(AP) \\
&= (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)(\underline{P^{-1}AP})
\end{aligned}$$


微分
f: R→R
f: R^n→R^m
偏微分 f(x,y)
∂f/∂x (x,y)
∂f/∂y (x,y)
m=2
n=1
f(x)=(f1(x), f2(x))
n=2
m=1
α∈R
1次元
線型空間
x∈R
αx
x=x1
φ: R→R
φ(x)=φ(x1)=x
比例


α∈R
1次元
線型空間
x∈R
αx
x=x1
曲がっているのは
代
φ: R→R
線型写像
φ(x)=φ(x1)=xφ(1)
定数
比例定数
比例
y=f(x)
接線
Δy
x
Δx
xを固定
比例
xでのfの
微分係数=比例定数



z=f(x,y)
接平面
Δz = a Δx + b Δy
∂z/∂x
∂z/∂y
z
y
x