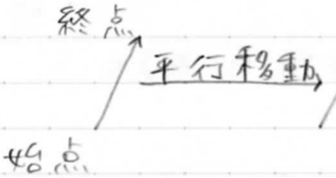
相似

A, Bは2×2の行列

A, B $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (∃正規行列P)

$(A=PBP^{-1})$

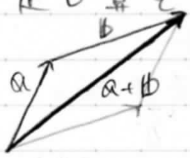
ベクトル(2次元、平面) 矢印

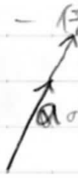


$\alpha\in\mathbb{R}$ 平行移動した矢印は

$\alpha=0$ 同一視

・足し算とスカラー倍





$\mathbb{a}$の長さをα倍

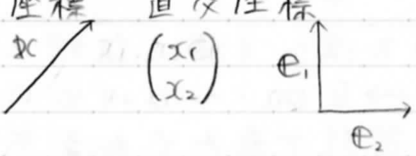
・法則

$$\begin{cases} \mathbb{a}+(\mathbb{b}+\mathbb{c})=(\mathbb{a}+\mathbb{b})+\mathbb{c} & (\text{結合律}) \\ \mathbb{a}+\mathbb{b}=\mathbb{b}+\mathbb{a} & (\text{交換律}) \\ \mathbb{a}+\mathbb{0}=\mathbb{0}+\mathbb{a}=\mathbb{a} & (\text{単位元}) \\ \mathbb{a}+(-\mathbb{a})=(-\mathbb{a})+\mathbb{a}=\mathbb{0} & \\ (\alpha+\beta)\mathbb{a}=\alpha\mathbb{a}+\beta\mathbb{a} & \alpha,\beta\in\mathbb{R} \\ \alpha(\mathbb{a}+\mathbb{b})=\alpha\mathbb{a}+\alpha\mathbb{b} & \\ (\alpha\beta)\mathbb{a}=\alpha(\beta\mathbb{a}) & \\ 1\mathbb{a}=\mathbb{a} & \end{cases}$$

・線形空間(線型空間)

ベクトルを2個の数の組で表したい

座標 直交座標



$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

一意的

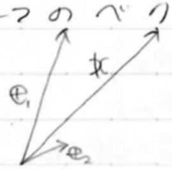
$x_1, x_2\in\mathbb{R}$

$\mathbb{x}=x_1\mathbb{e}_1+x_2\mathbb{e}_2$

・線形座標

$\boxed{\mathbb{e}_1\text{と}\mathbb{e}_2\text{が同一直線上にない}} \Longrightarrow \boxed{c_1\mathbb{e}_1+c_2\mathbb{e}_2=\mathbb{0}\rightarrow c_1=c_2=0}$ $c_1, c_2\in\mathbb{R}$

2つのベクトル



Date 6・9

・線形写像

平面上のベクトルの全体をV^2で表す

写像$\varphi: V^2 \to V^2$

$\left\{\begin{array}{l}\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\varphi(\mathbf{x})+\varphi(\mathbf{y})\\ \varphi(\alpha\mathbf{x})=\alpha\varphi(\mathbf{x})\end{array}\right\}$ この条件を満たす時 線形写像という。

・基底

同一直線上にない2個のベクトル$\mathbf{e}_1$と$\mathbf{e}_2$の組$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$を基底という。

$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2$

φ: 線形写像

$\to \varphi(\mathbf{x})=\varphi(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2)$
$=\varphi(x_1\mathbf{e}_1)+\varphi(x_2\mathbf{e}_2)$
$=x_1\varphi(\mathbf{e}_1)+x_2\varphi(\mathbf{e}_2)$ → $\varphi(\mathbf{e}_1)$と$\varphi(\mathbf{e}_2)$が決まると 線形写像φは一意的に決まる。

$\varphi(\mathbf{e}_1)=a_{11}\mathbf{e}_1+a_{21}\mathbf{e}_2$ $\{\varphi(\mathbf{e}_1)\in V^2,\ a_{11}, a_{21}\in\mathbb{R}\}$

$\varphi(\mathbf{e}_2)=a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2$ $\{\varphi(\mathbf{e}_2)\in V^2,\ a_{12}, a_{22}\in\mathbb{R}\}$

→ 2×2の行列 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ $\quad (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2))=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$

線形写像φに対して基底$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$が固定されていると、2×2の行列$A$が定まる。

- 行列式→17c後半 独・日で同時に発見

行列→19c

行列は線形写像を表す

V^2からV^2への線形写像の全体

足し算 : $(\varphi_1+\varphi_2)(\mathbf{x})=\varphi_1(\mathbf{x})+\varphi_2(\mathbf{x})$ } definition

スカラー倍 : $(\alpha\varphi)(\mathbf{x})=\alpha\varphi(\mathbf{x})$

宿題Ⅰ：この定義が線形写像の条件を満たす事を証明せよ。
〃 Ⅱ：$\varphi_1\leftrightarrow A$, $\varphi_2\leftrightarrow B$ の時、(1) $\varphi_1+\varphi_2\leftrightarrow A+B$ (2) $\alpha\varphi_1\leftrightarrow\alpha A$ $\leftrightarrow$とは、〜は〜という行列で表わされるという意味で使われている。

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$基底の取りかえ

$\to(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ $\quad p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}\in\mathbb{R}$ $\quad (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$も基底

$V^2\ni\mathbf{f}_1=p_{11}\mathbf{e}_1+p_{21}\mathbf{e}_2$
$\mathbf{f}_2=p_{12}\mathbf{e}_1+p_{22}\mathbf{e}_2$ $\Rightarrow \boxed{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)P}$ $\quad P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$

$\mathbf{e}_1=q_{11}\mathbf{f}_1+q_{21}\mathbf{f}_2$ $\quad \boxed{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)=(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)Q}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)PQ$ $\quad PQ=QP=E$

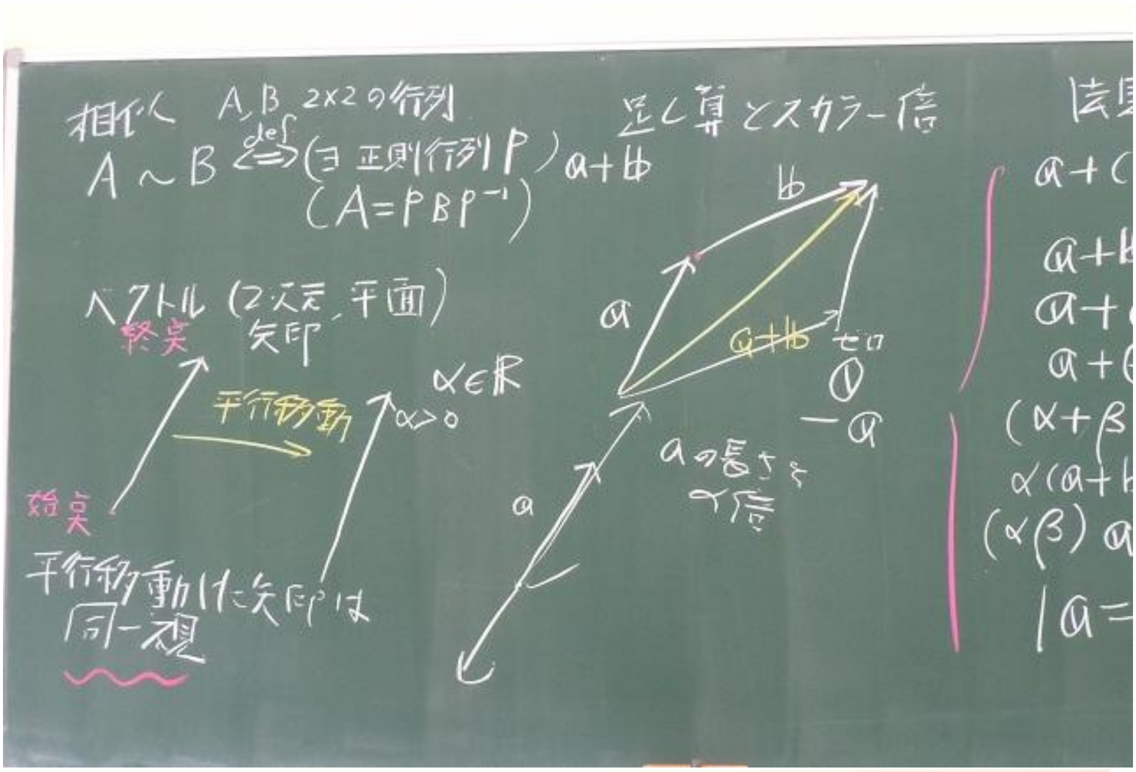
$\mathbf{e}_2=q_{12}\mathbf{f}_1+q_{22}\mathbf{f}_2$ $\quad Q=\begin{pmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l}\mathbf{e}_1=1\mathbf{e}_1+0\mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_2=0\mathbf{e}_1+1\mathbf{e}_2\end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

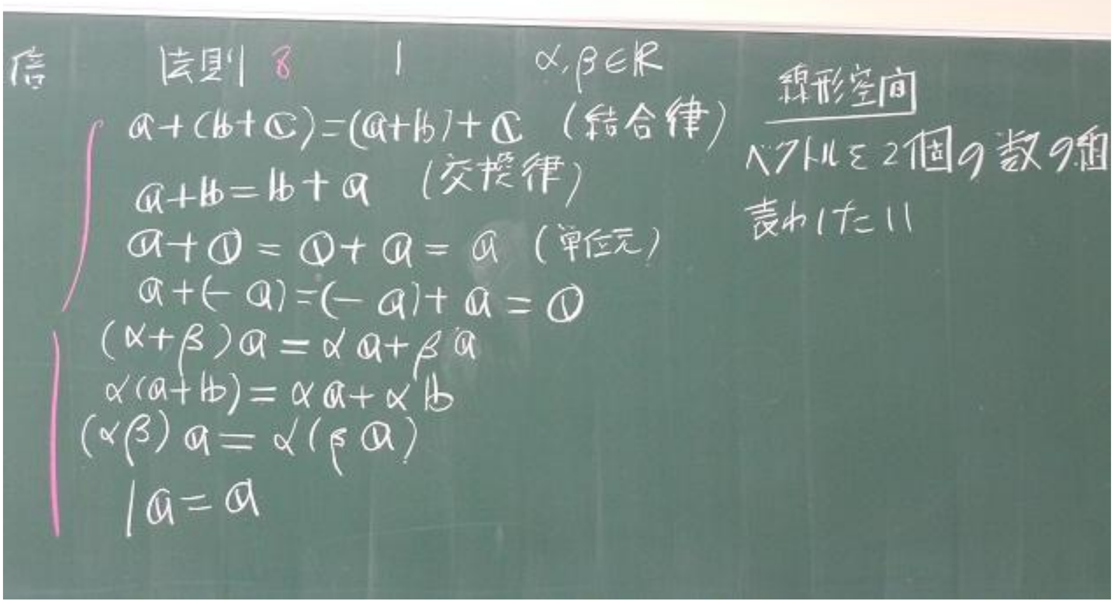
結論

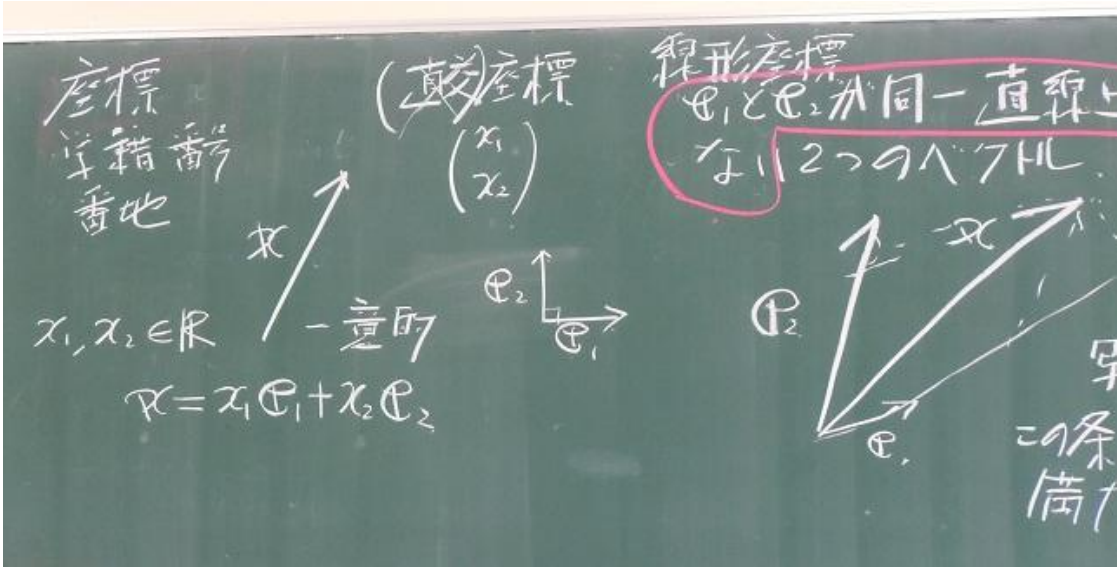
PとQは正則行列

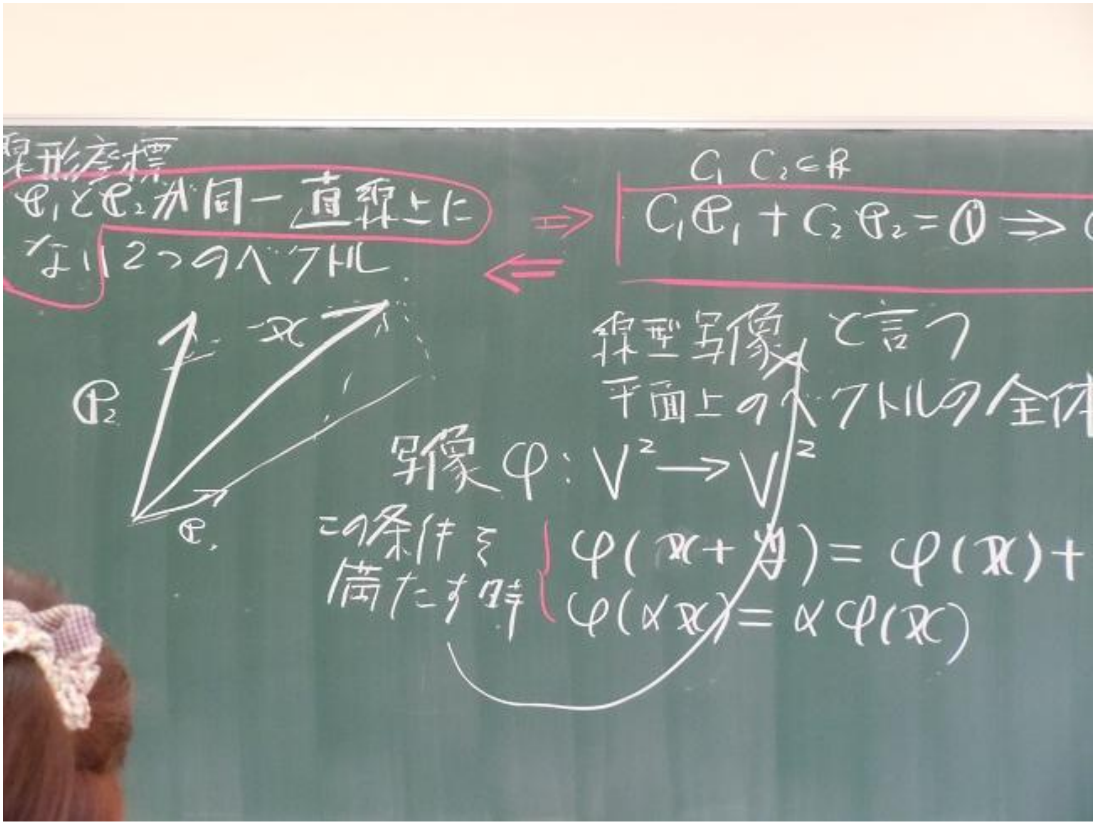
$P=Q^{-1}$ $\quad Q=P^{-1}$

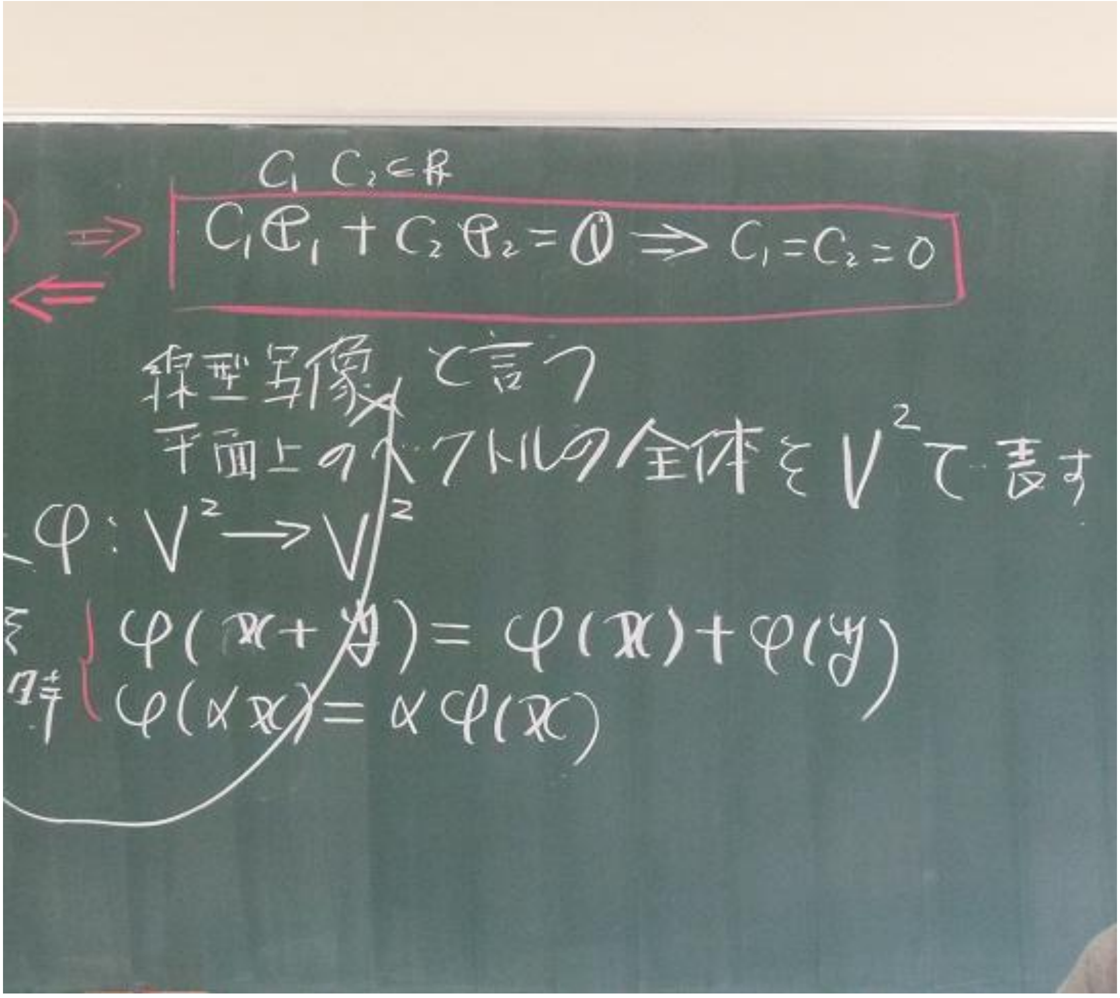
来週は→ $\underset{A}{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}$ $\quad \underset{B}{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2}$ $\quad A=PBP^{-1}$

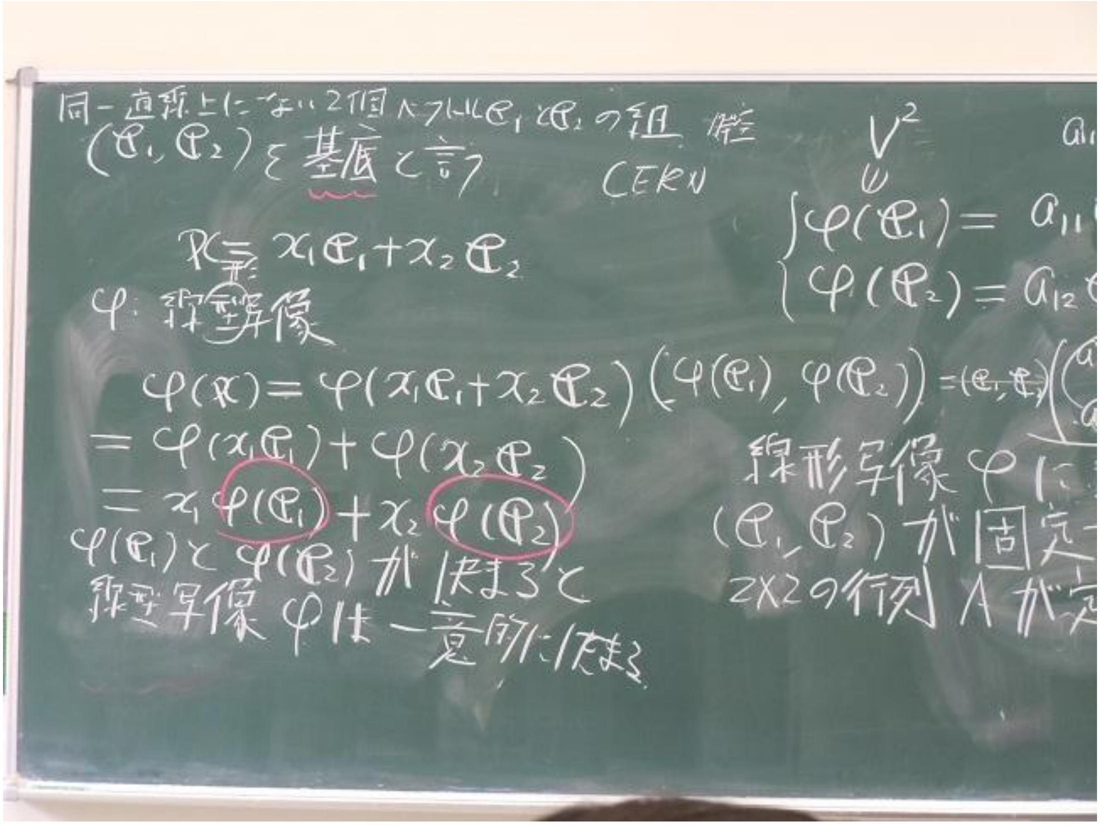

相似 A, B 2×2の行列
A ∼ B ⟺(def) (∃ 正則行列 P)
(A = PBP⁻¹)
ベクトル (2次元, 平面)
矢印
終点
始点
平行移動
α∈ℝ
α>0
平行移動した矢印は
同一視
足し算とスカラー倍
a + b
b
a
a + b
ゼロ
0
−a
a
aの長さを
α倍
法則
a + (
a + b
a +
a + (
(α + β
α(a + b
(αβ) a
1a =

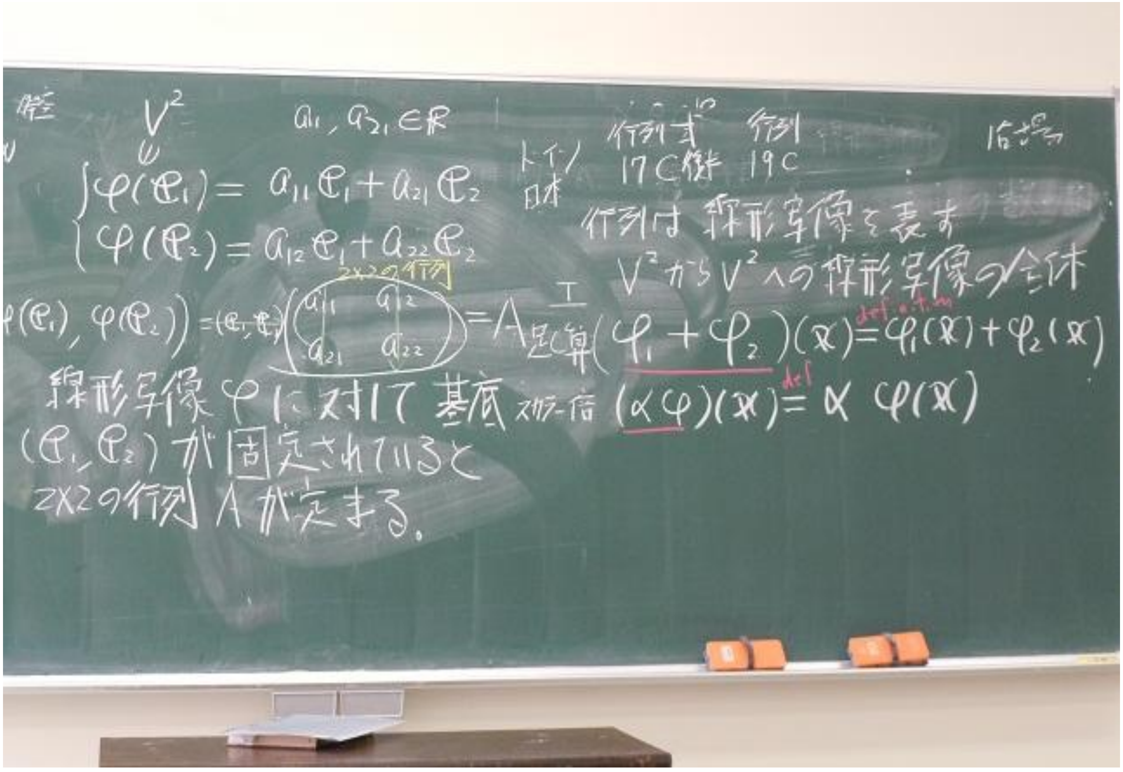

倍
法則 8
1
α, β∈ℝ
a + (b + c) = (a + b) + c (結合律)
a + b = b + a (交換律)
a + 0 = 0 + a = a (単位元)
a + (−a) = (−a) + a = 0
(α + β) a = αa + βa
α(a + b) = αa + αb
(αβ) a = α(βa)
1a = a
線形空間
ベクトルを2個の数の組
表わしたい


座標
学籍番号
番地
(直交)座標
線形座標
e1とe2が同一直線上
ない2つのベクトル
x
e2
e1
x1, x2 ∈ R
一意的
x = x1e1 + x2e2
この条
満た


線形座標
e1とe2が同一直線上に
ない2つのベクトル
c1 c2 ∈ R
c1e1 + c2e2 = 0 ⇒
線型写像と言う
平面上のベクトルの全体
写像 φ : V² → V²
この条件を
満たす時
φ(x + y) = φ(x) +
φ(αx) = αφ(x)
x
e2
e1


$c_1\ c_2 \in \mathbb{R}$
$c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$
線型写像と言う
平面上のベクトルの全体をV^2で表す
$\varphi : V^2 \longrightarrow V^2$
$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
$\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$


同一直線上にない2個ベクトル $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ の組
$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ を基底と言う
CERN
V^2
$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$
φ: 線形写像
$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2)$
$= \varphi(x_1\mathbf{e}_1) + \varphi(x_2\mathbf{e}_2)$
$= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + x_2\varphi(\mathbf{e}_2)$
$\varphi(\mathbf{e}_1)$ と $\varphi(\mathbf{e}_2)$ が決まると
線形写像 φ は一意的に決まる


V^2
$a_1, a_{21} \in \mathbb{R}$
$\varphi(\mathbf{e}_1) = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2$
$\varphi(\mathbf{e}_2) = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2$
2×2の行列
$(\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$
線形写像 φ に対して基底
$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ が固定されていると
2×2の行列 A が定まる。
行列式 17C
行列 19C
ドイツ 日本
行列は線形写像を表す
V^2 から V^2 への線形写像の全体
足し算 $(\varphi_1 + \varphi_2)(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) + \varphi_2(\mathbf{x})$
スカラー倍 $(\alpha\varphi)(\mathbf{x}) = \alpha\,\varphi(\mathbf{x})$

II

$\varphi_1 \longleftrightarrow A$

$\varphi_2 \longleftrightarrow B$

$\Downarrow$

(1) $\varphi_1 + \varphi_2 \longleftrightarrow A + B$

(2) $\alpha\varphi_1 \longleftrightarrow \alpha A$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ $\qquad$ $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$

A $\qquad$ B

$A = PBP^{-1}$

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ 基底のとりかえ

基底 $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ p_{11}

$V^2 \ni \mathbf{f}_1 = p_{11}\mathbf{e}$

$\mathbf{f}_2 = p_{12}\mathbf{e}$

$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ 結論

$\in \mathbb{R}$

$+ p_{21}\mathbf{e}_2$

$+ p_{22}\mathbf{e}_2$

$\mathbf{e}_1 = q_{11}\mathbf{f}_1 + q_{21}\mathbf{f}_2$

$\mathbf{e}_2 = q_{12}\mathbf{f}_1 + q_{22}\mathbf{f}_2$

$\boxed{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)Q}$

$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$

$\mathbf{e}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2$

$\mathbf{e}_2 = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$QP = E$

$E = PQ$

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)Q = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)PQ$

PとQは正則行列で $P = Q^{-1}$ $\quad Q = P^{-1}$