微分方程式

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ← 2×2の行列

tに関する二次式

$|tE-A|$ 固有多項式(proper)

$|tE-A|=0$ 固有方程式

解 固有値

・異なる実数を固有値に持つ場合、複素数

$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ aもbも実数

$|tE-A|=0$

→解答 $\left| \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right| = 0$

$\left| \begin{pmatrix} t-a & b \\ -b & t-a \end{pmatrix} \right| = 0$

$(t-a)^2+b^2=0 \quad (t-a)^2=-b^2 \quad t-a=\pm bi \quad t=a\pm bi$

$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = aE + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

$e^{At} = e^{aEt + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} t}$

$= e^{aEt} e^{\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} t}$ ← 指数法則

$= \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}$? $\begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -(bt)^2 & 0 \\ 0 & -(bt)^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} & {}'' & \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & bt^3 \\ -(bt)^3 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} & {}'' & \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} (bt)^4 & 0 \\ 0 & (bt)^4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} & {}'' & \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0 & -(bt)^5 \\ (bt)^5 & 0 \end{pmatrix}$

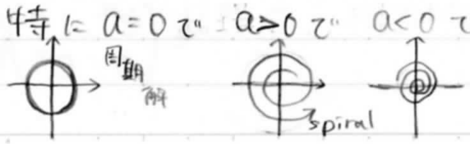
$\begin{pmatrix} & {}'' & \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} -(bt)^6 & 0 \\ 0 & -(bt)^6 \end{pmatrix}$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} t} = E + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -(bt)^2 & 0 \\ 0 & -(bt)^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & bt^3 \\ -(bt)^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} (bt)^4 & 0 \\ 0 & (bt)^4 \end{pmatrix} + \frac{1}{5!}\begin{pmatrix} 0 & -(bt)^5 \\ (bt)^5 & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2!}b^2t^2+\frac{1}{4!}b^4t^4-\cdots & -bt+\frac{1}{3!}b^3t^3-\frac{1}{5!}b^5t^5+\cdots \\ bt-\frac{1}{3!}b^3t^3+\frac{1}{5!}b^5t^5-\cdots & 1-\frac{1}{2!}b^2t^2+\frac{1}{4!}b^4t^4-\cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ 特に$a=0$で $a>0$で $a<0$で



Date H22 6 2

定理：2×2の行列Aが$a\pm bi$ $(b\neq 0)$を固有値に持てば
正則行列Pが存在して
$A=P\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}P^{-1}$ と書ける。

$e^{tA}=e^{tP\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}P^{-1}}=Pe^{t\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}}P^{-1}$

$x=c_{11}e^{at}\cos bt+c_{12}e^{at}\sin bt$　$c_{11},c_{12},c_{21},c_{22}$は
$y=c_{21}e^{at}\cos bt+c_{22}e^{at}\sin bt$　よく分からない定数
$c_1e^{at}\cos bt+c_2e^{at}\sin bt=0$ なら $c_1=c_2=0$ $(\forall t\in\mathbb{R})$

$\boxed{x''=-x}\rightarrow$ $x=\cos t$　$x=\sin t$
$x'=-\sin t$　$x'=\cos t$
$x''=-\cos t$　$x''=-\sin t$

巾級数

$\begin{cases}x'=y\\ y'=x\end{cases}$ とおく　$a=0$ $b=-1$ $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

連立微分方程式

定理：Aの固有方程式がaを重根に持ち、しかもAが対角型でない時、正則行列Pが存在して
$A=P\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}P^{-1}$ と書ける

宿題Ⅰ
(1) $\begin{cases}x'=-2y\\ y'=2x\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x'=x-2y\\ y'=2x+y\end{cases}$

宿題Ⅱ
(1) $\begin{cases}x'=2x-y\\ y'=2y\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x'=2x-y\\ y'=x+2y\end{cases}$
(3) $\begin{cases}x'=y\\ y'=x\end{cases}$

$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$　$|tE-A|=0\rightarrow$ 重根（解）

$P\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}P^{-1}=PaEP^{-1}=aPP^{-1}=aE$

$\left|tE-\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}\right|=0$

$\left|\begin{pmatrix}t-a & -1\\ 0 & t-a\end{pmatrix}\right|=0$

$(t-a)^2=0$

$\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\underbrace{aE+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{交換可能!}$

指数法則

$e^{t\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}}=e^{aEt}e^{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}t}=\begin{pmatrix}e^{at} & 0\\ 0 & e^{at}\end{pmatrix}\cdots$

$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2=0$　$e^{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}t}=E+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}t$

$e^{t\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}e^{at} & 0\\ 0 & e^{at}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{at} & te^{at}\\ 1 & e^{at}\end{pmatrix}$

Date H22 . 6 . 2

$A = PBP^{-1}$ Pは正則行列

$A \sim B$ 相似

Aという行列が与えられた時

Aと相似でなるたけ

簡単な行列を求める

$A \sim B \Rightarrow B \sim A \Rightarrow B = PAP^{-1}$

$A \sim A \Rightarrow P = E$

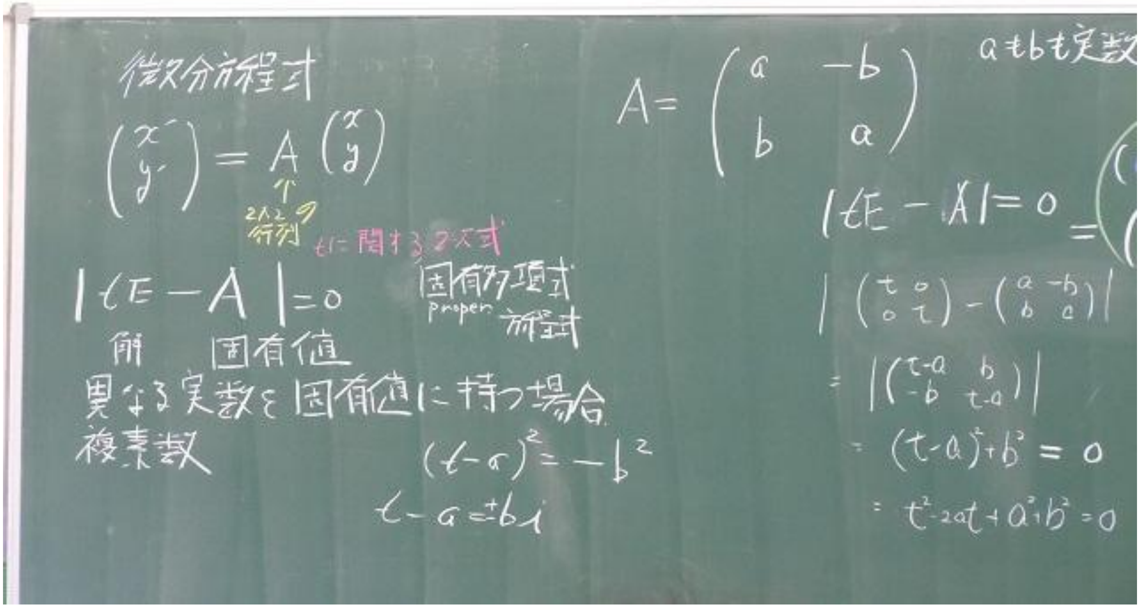
$A \sim B \,\&\, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$B = QCQ^{-1} \Rightarrow A = PQCQ^{-1}P^{-1}$

class分け

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ どれかと相似

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 分類論… 19C 後半 Jordanの標準形


微分方程式
$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
2×2の行列
tに関する2次式
$|tE-A|=0$
固有多項式
proper
方程式
解 固有値
異なる実数を固有値に持つ場合
複素数
$(t-a)^2=-b^2$
$t-a=\pm bi$
$A=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$
aもbも実数
$|tE-A|=0$
$\left|\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right|$
$=\left|\begin{pmatrix}t-a & b\\ -b & t-a\end{pmatrix}\right|$
$=(t-a)^2+b^2=0$
$=t^2-2at+a^2+b^2=0$


$\begin{matrix}-b\\ a\end{pmatrix}$
aもbも実数
$|tE-A|=0$
$=(aE)\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}(aE)$
$\left|\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\right|$
$=\left|\begin{pmatrix}t-a & b\\ -b & t-a\end{pmatrix}\right|$
$=(t-a)^2+b^2=0$
$=t^2-2at+a^2+b^2=0$
$t=a\pm\sqrt{a^2-(a^2+b^2)}$
$=a\pm\sqrt{-b^2}$
$=a\pm bi$
$A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}$
$=aE+\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}$
$e^{At}=e^{aEt+\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}t}$
指数法則
$=e^{aEt}e^{\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}t}$
$=\begin{pmatrix}e^{at} & 0\\ 0 & e^{at}\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(bt)^2 & 0 \\ 0 & -(bt)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -(bt)^2 & 0 \\ 0 & -(bt)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (bt)^3 \\ -(bt)^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & (bt)^3 \\ -(bt)^3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (bt)^4 & 0 \\ 0 & (bt)^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} (bt)^4 & 0 \\ 0 & (bt)^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(bt)^5 \\ (bt)^5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 0 & -(bt)^5 \\ (bt)^5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(bt)^6 & 0 \\ 0 & -(bt)^6 \end{pmatrix}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \cdots$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}t} = E + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}t + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -(bt)^2 & 0 \\ 0 & -(bt)^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & (bt)^3 \\ -(bt)^3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} (bt)^4 & 0 \\ 0 & (bt)^4 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$+ \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2!}b^2t^2 + \frac{1}{4!}b^4t^4 \cdots & -bt + \frac{1}{3!}b^3t^3 - \frac{1}{5!}b^5t^5 \cdots \\ bt - \frac{1}{3!}b^3t^3 + \frac{1}{5!}b^5t^5 \cdots & 1 - \frac{1}{2!}b^2t^2 + \frac{1}{4!}b^4t^4 \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$$

t

$$= E + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -(bt)^2 & 0 \\ 0 & -(bt)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (bt)^3 \\ -(bt)^3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} (bt)^4 & 0 \\ 0 & (bt)^4 \end{pmatrix} + \frac{1}{5!}\begin{pmatrix} 0 & -(bt)^5 \\ (bt)^5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$t^2 + \frac{1}{4!}b^4t^4 \cdots \qquad -bt + \frac{1}{3!}b^3t^3 - \frac{1}{5!}b^5t^5 \cdots$$

$$b^3t^3 + \frac{1}{5!}b^5t^5 \cdots \qquad 1 - \frac{1}{2!}b^2t^2 + \frac{1}{4!}b^4t^4 \cdots$$

$$\begin{matrix} -\sin bt \\ \cos bt \end{matrix}\Bigg)$$

定理 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2×2の行列Aが
$a \pm bi$ ($b \neq 0$)を固有値に
持てば 正則行列Pが
存在して

$$A = P\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}P^{-1} \text{と書ける}$$

$$e^{tA} = e^{tP\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}P}$$

$$= Pe^{t\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}P^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$ aもbも実数

微分方程式の一般解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{at}\begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

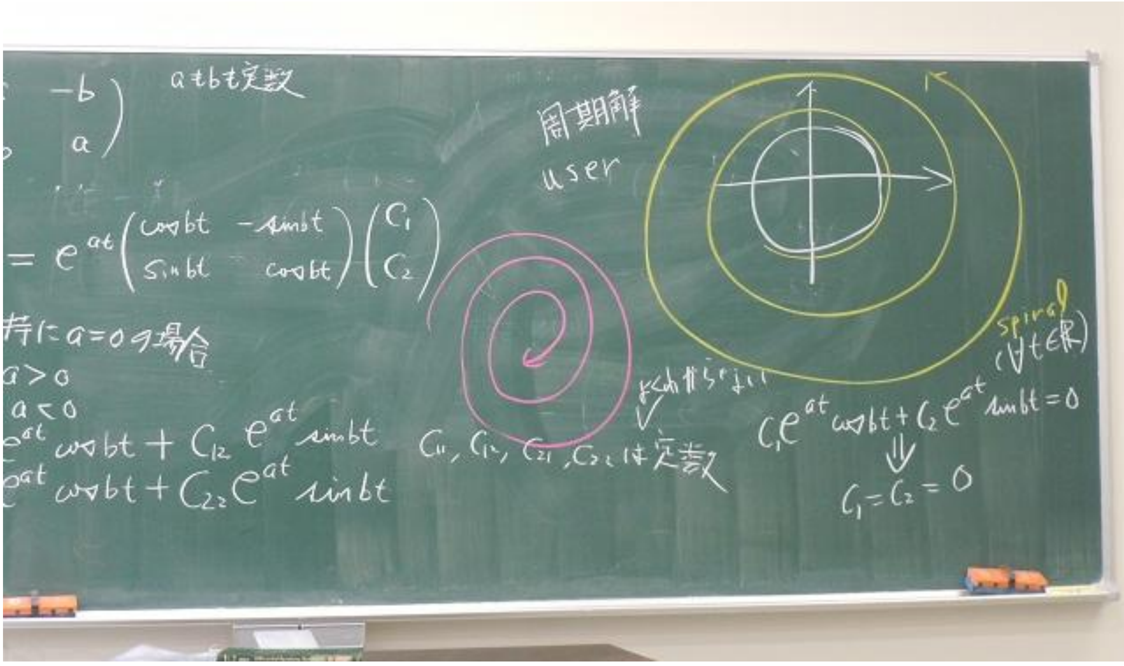
特に$a=0$の場合

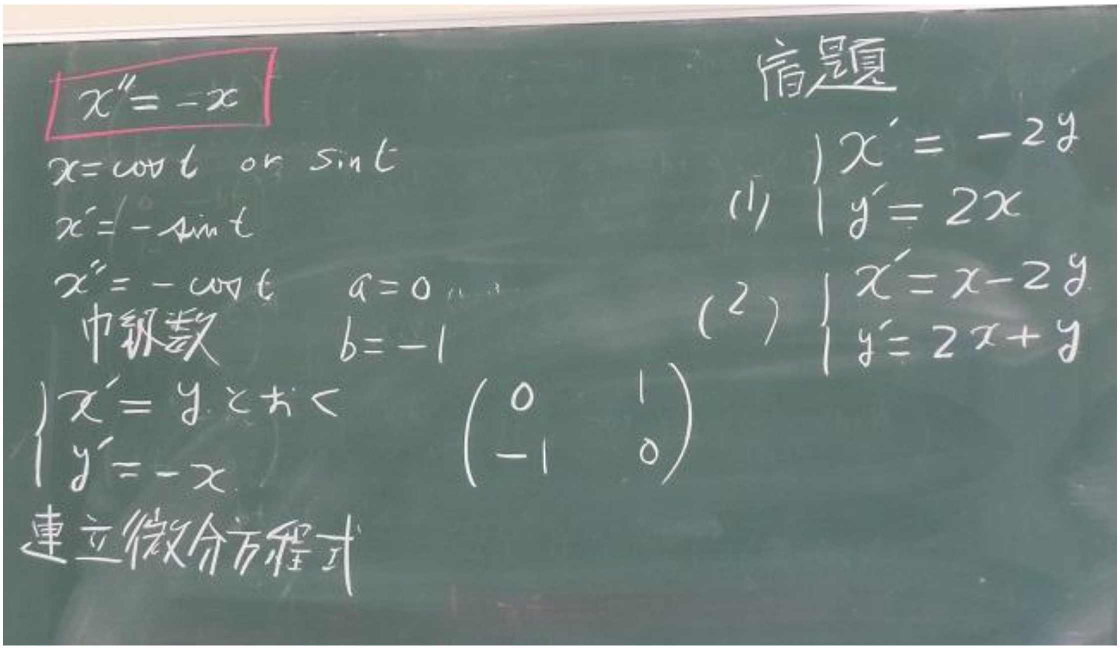
$a>0$

$a<0$

$$\begin{cases} x = C_{11}e^{at}\cos bt + C_{12}e^{at}\sin bt \\ y = C_{21}e^{at}\cos bt + C_{22}e^{at}\sin bt \end{cases}$$

C_{11}, C_{12}, C


aもbも定数
周期解
user
$= e^{at}\begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$
特にa=0の場合
$a>0$
$a<0$
$C_{11}e^{at}\cos bt + C_{12}e^{at}\sin bt$
$C_{21}e^{at}\cos bt + C_{22}e^{at}\sin bt$
$C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$は定数
よくわからない
spiral
$(\forall t \in \mathbb{R})$
$C_1e^{at}\cos bt + C_2e^{at}\sin bt = 0$
$\Downarrow$
$C_1 = C_2 = 0$


$x'' = -x$
$x = \cos t$ or $\sin t$
$x' = -\sin t$
$x'' = -\cos t$
$a=0$
巾級数
$b=-1$
$x' = y$ とおく
$y' = -x$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
連立微分方程式
問題
(1) $x' = -2y$, $y' = 2x$
(2) $x' = x-2y$, $y' = 2x+y$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|tE - A| = 0$$

重根 root

重解

$$aE$$

$$P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}P^{-1} = P\, aE\, P^{-1} = a PP^{-1} = aE$$

$$\left| tE - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} t-a & -1 \\ 0 & t-a \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$(t-a)^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = aE + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = O$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t} = E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \neq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

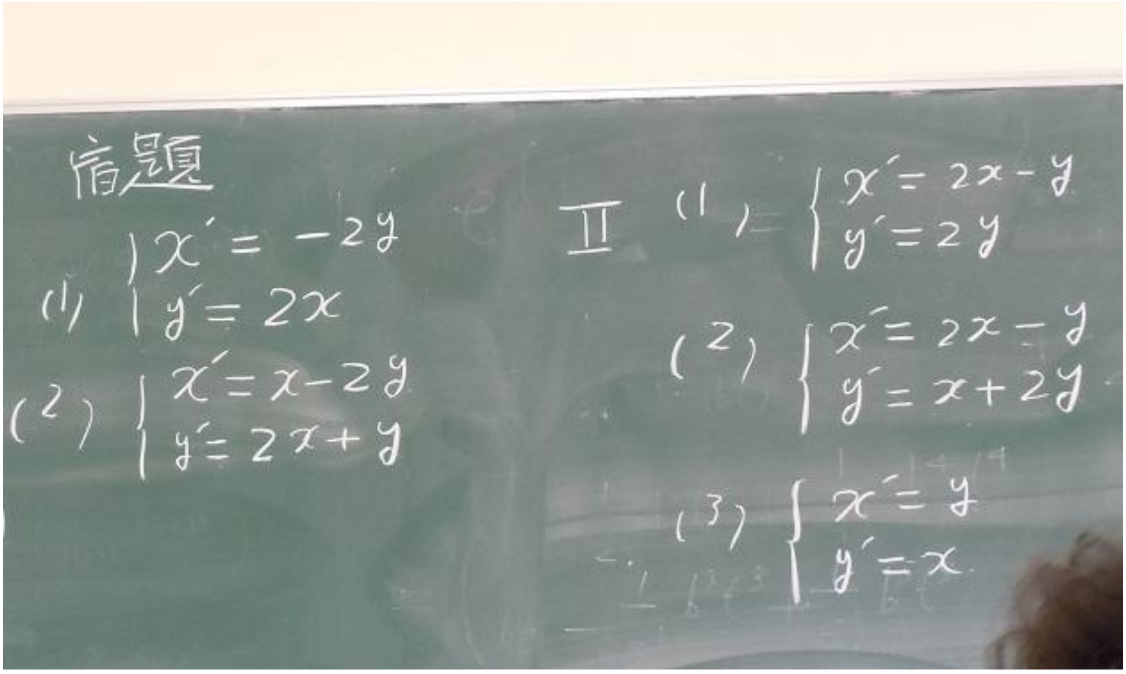
指数法則

$$e^{t\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}} = e^{aEt}\, e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t}$$

$$e^{aEt} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}$$

定理 A の固有方程式が a を重根を持ち，しかも A が対角型でない時，正則行列 P が存在して $A = P\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}P^{-1}$ と書ける。


問題
(1) $x' = -2y$, $y' = 2x$
(2) $x' = x-2y$, $y' = 2x+y$
II (1) $x' = 2x-y$, $y' = 2y$
(2) $x' = 2x-y$, $y' = x+2y$
(3) $x' = y$, $y' = x$


$A=PBP^{-1}$ Pは正則行列
$A\sim B$ 相似
Aという行列が与えられた時
Aと相似でなるたけ
簡単な行列を求める
$A\sim B \Rightarrow B\sim A$
class分け
$B=P^{-1}AP$
$A\sim A$ $P=E$
$A\sim B$ & $B\sim C \Rightarrow A\sim C$
$B=QCQ^{-1}$
$A=PBP^{-1}=(PQ)CQ^{-1}P^{-1}$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
19C後半
分類論
Jordanの標準形