微積分

H22 5 19

微分方程式

- 多項式(有限 or 無限)
  - $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(x)}{3!}h^3+\frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$

    ↑この時、$h\in D_n=\{d\in \mathbb{R} \mid d^{n+1}=0\}$
  - $d\in D_n$の時、

    $f(x+d)=f(x)+f'(x)d+\frac{f''(x)}{2}d^2+\frac{f'''(x)}{3!}d^3+\frac{f^{(4)}(x)}{4!}d^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}d^n$

    ↑これをTaylorの展開、Taylorの定理という。
- $\boxed{x'=x}=x(t)$の時

  $x(t)=C\left\{1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots\right\}$　　$x(0)=C$(定数)　$x'(0)=x(0)=C$

  $x''(0)=x'(0)=x(0)=C$

  $x(t)=x(0)+x'(0)t+\frac{x''(0)}{2!}t^2+\frac{x'''(0)}{3!}t^3+\frac{x^{(4)}(0)}{4!}t^4+\cdots$
- $\left.\begin{array}{l} x(t)=\sin t \\ x'(t)=\cos t \\ x''(t)=-\sin t \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{x''=-x} \longleftarrow \left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos t \\ x'(t)=-\sin t \\ x''(t)=-\cos t \end{array}\right.$

※$\boxed{x'=x}$を1階の微分方程式、$\boxed{x''=-x}$を2階の微分方程式という

$x''=-x$の時…

$x(0)=C_1$(位置)、$x'(0)=C_2$(速度)とおく時

$x''(0)=-x(0)=-C_1$, $x'''(0)=-x'(0)=-C_2$,

$x^{(4)}(0)=-x''(0)=x(0)=C_1$, $x^{(5)}(0)=-x'''(0)=x'(0)=C_2$

$$\rightarrow x(t)=C_1+C_2t-\frac{C_1}{2!}t^2-\frac{C_2}{3!}t^3+\frac{C_1}{4!}t^4+\frac{C_5}{5!}t^5-\cdots$$

$$=C_1\underbrace{\left\{1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\cdots\right\}}_{\cos t}+C_2\underbrace{\left\{t-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5-\cdots\right\}}_{\sin t}$$

$$=C_1\cos t+C_2\sin t \longleftarrow \text{一般解}$$

宿題I 加法定理の証明

$\sin(t_1+t_2)=\sin t_1\cos t_2+\cos t_1\sin t_2$

$\cos(t_1+t_2)=\cos t_1\cos t_2-\sin t_1\sin t_2$

これらを、$\begin{array}{l}\sin t=t-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5-\cdots \\ \cos t=1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\cdots\end{array}$ を使って証明せよ。

生物学類 開講「微積分」

5/19分のノートです。

生物学類 3年 200810584 川口明音

・$x' = ax$（aは定数）$\rightarrow x = Ce^{at}$（Cは定数）

$(e^{at})' = ae^{at}$, $\left(\dfrac{x}{e^{at}}\right)' = \dfrac{x'e^{at} - xae^{at}}{(e^{at})^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{e^{at}}$は定数$C \Rightarrow x = Ce^{at}$

ー意性ー初期条件

↑決定論的⇝世界観にまで発展

cf. Darwinの進化論をMarxが社会学に応用

→史的唯物論

原始共産→奴隷制→封建制

→資本主義→社会主義→共産主義

$x' = ax$は人口の変化を表せる。$a>0$で増加、$a<0$で減少

同位体元素C^{14}の半減期も表せる。

$x(T) = \dfrac{1}{2}x(0)$となる様なTの事

宿題Ⅱ 半減期T

(i) Tは$x(0)$によらず一定で、$T = -\log 2/a$になる事を示せ。

(ii) $x\{(j+1)T\} = (1/2)x(jT)$ 〔$j = 0, 1, 2, \cdots$〕

・$x'' = -x$にyを導入

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x \end{array}\right\}$ 連立微分方程式

2×2の行列Aを用いて表す。aは定数。

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{array}{l} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{array}$

。$e^{at} = 1 + at + \dfrac{1}{2!}(at)^2 + \dfrac{1}{3!}(at)^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}(at)^n + \cdots$ は下の様に。

$e^{at} = E + At + \dfrac{1}{2!}A^2t^2 + \dfrac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}A^nt^n + \cdots$（Eは単位行列）

$(e^{at})' = A + \dfrac{2}{2!}A^2t + \dfrac{3}{3!}A^3t^2 + \cdots + \dfrac{n}{n!}A^nt^{n-1} + \cdots = A\left(E + At + \dfrac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots\right) = Ae^{at}$

。$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$の時、$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$

$e^{at} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}t + \dfrac{1}{2!}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}t^2 + \cdots = \begin{pmatrix} 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + bt + \frac{1}{2!}b^2t^2 + \cdots \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}$

ウラ↘

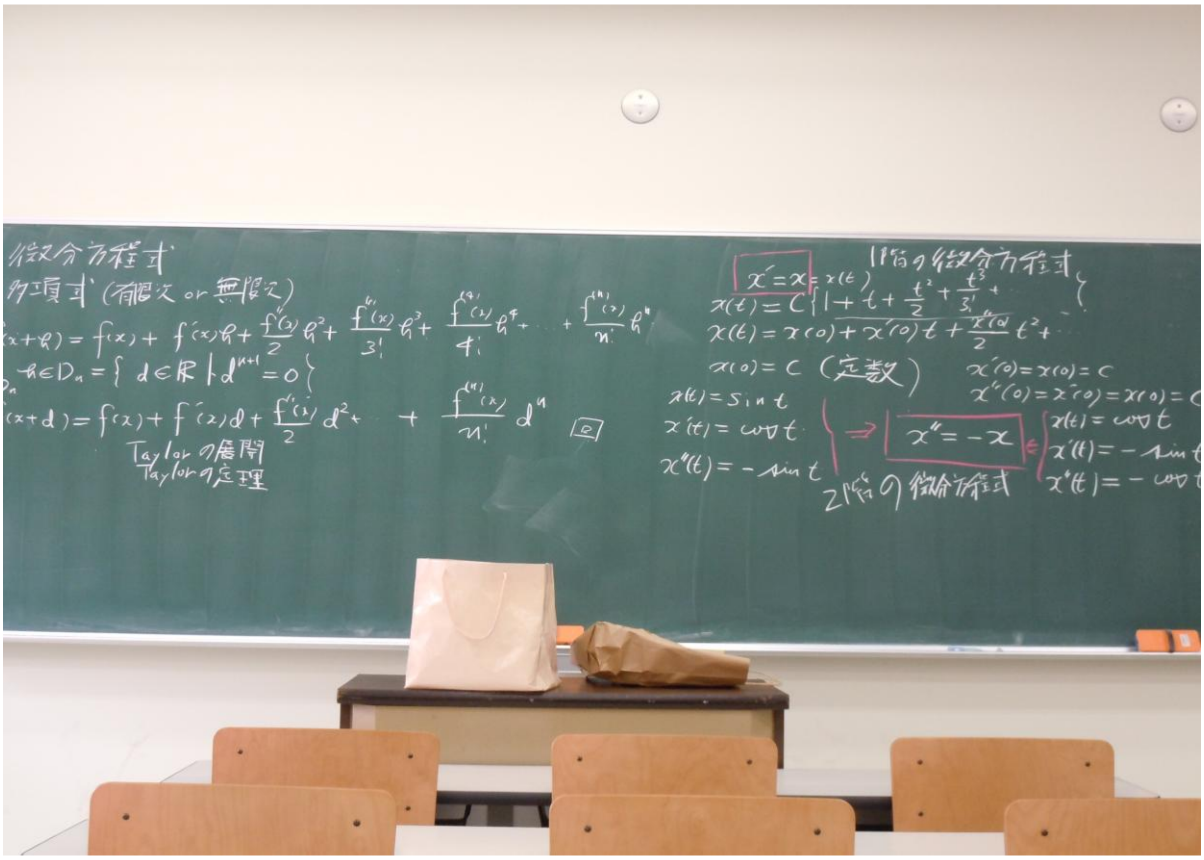
5 19

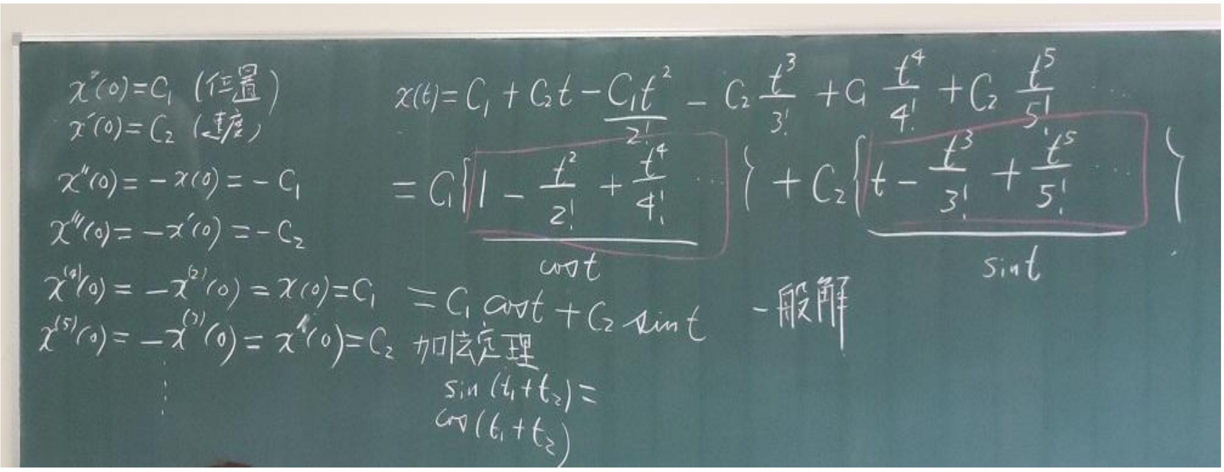
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せ、 $\begin{matrix} x' = ax \\ y' = bx \end{matrix}$

- $B = P^{-1}AP$ Pは正規行列

$$e^{Bt} = E + P^{-1}APt + \frac{1}{2!}\underbrace{(P^{-1}AP)^2}_{P^{-1}A^2P}t^2 + \frac{1}{3!}\underbrace{(P^{-1}AP)^3}_{P^{-1}A^3P}t^3 + \cdots$$

$$= P^{-1}\underbrace{\left\{E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots\right\}}_{e^{At}}P$$


微分方程式
多項式（有限次 or 無限次）
Taylorの展開
Taylorの定理
1階の微分方程式
x' = x
x(0) = C（定数）
x(t) = sin t
x'(t) = cos t
x''(t) = − sin t
x'' = −x
2階の微分方程式


x(0) = C₁（位置）
x'(0) = C₂（速度）
cos t
sin t
= C₁ cos t + C₂ sin t　一般解
加法定理
sin (t₁ + t₂) =
cos (t₁ + t₂)

$\boxed{x' = ax}$ （aは定数）

$x = Ce^{at}$ （Cも定数）

$(e^{at})' = ae^{at}$

$\left(\frac{x}{e^{at}}\right)' = \frac{\overset{ax}{x'}e^{at} - x\,ae^{at}}{(e^{at})^2} = 0$

$\frac{x}{e^{at}} = C$ （定数）

$x = Ce^{at}$

一意性

初期条件

決定論的

世界観

$x' = ax$　人口の変化　$a>0$ 増加　$a<0$ 減少

同位体元素　C^{14}

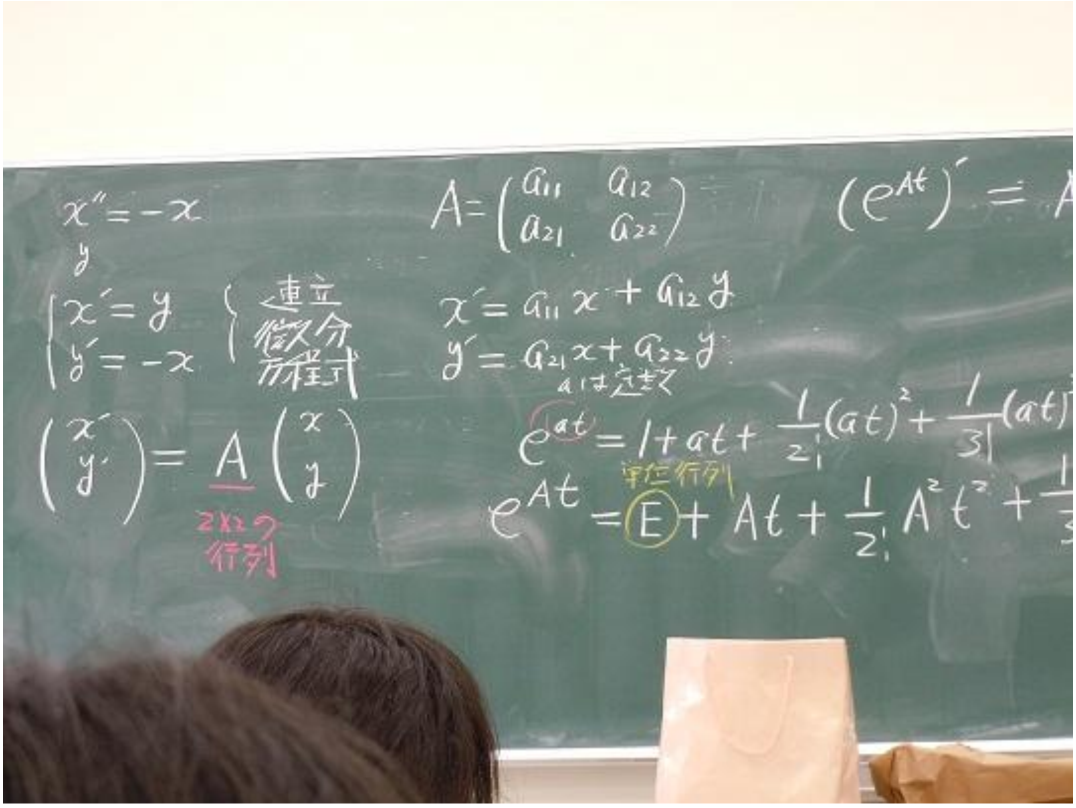
0　T　2T　3T

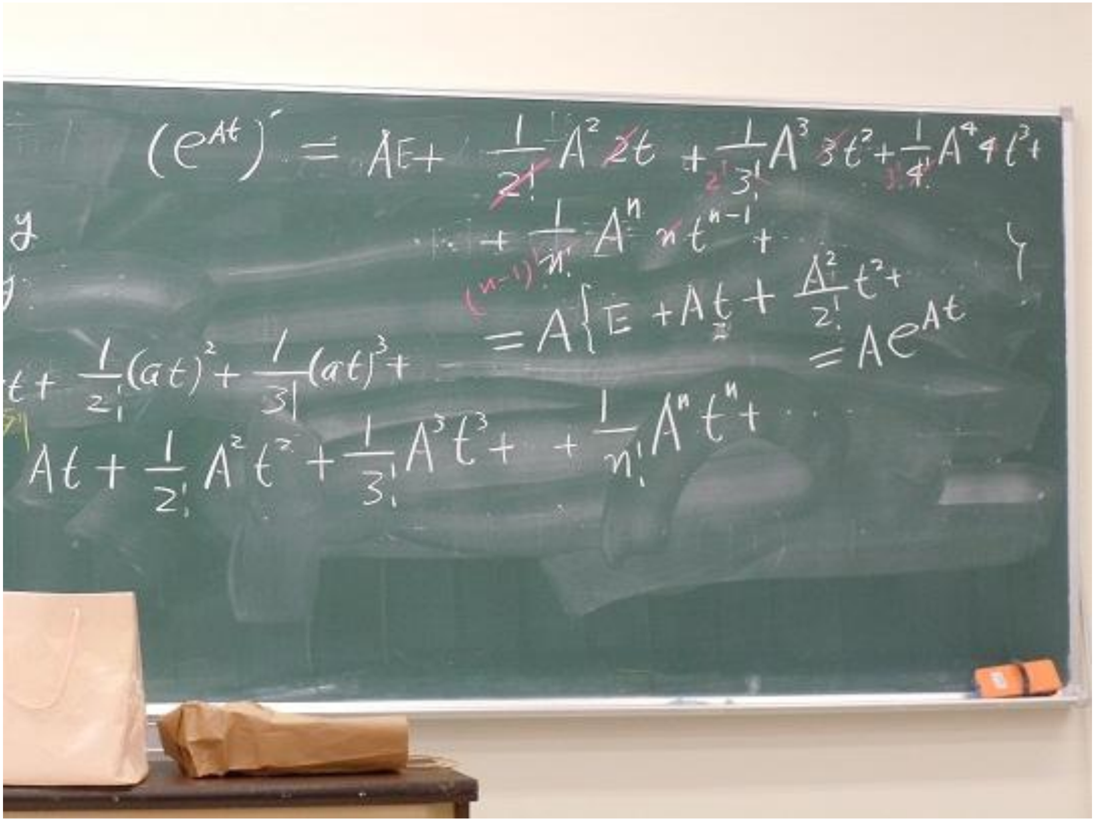
II　半減期 → T

$x(T) = \frac{1}{2}x(0)$

(1) Tは$x(0)$によらず一定で $T = -\frac{\log 2}{a}$ を示せ

(2) $x((i+1)T) = \frac{1}{2}x(iT)$ $(i=0,1,2,\cdots)$


$x'' = -x$
y
$x' = y$
$y' = -x$
連立
微分
方程式
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
2×2の行列
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
$(e^{At})' = A$
$x' = a_{11}x + a_{12}y$
$y' = a_{21}x + a_{22}y$
aは定数
$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}(at)^2 + \frac{1}{3!}(at)^3$
単位行列
$e^{At} = E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 +$


$(e^{At})' = AE + \frac{1}{\cancel{2!}}A^2\cancel{2}t + \frac{1}{3!}A^3\cancel{3}t^2 + \frac{1}{4!}A^4 4t^3 +$
2!
3!
$\cdots + \frac{1}{n!}A^n \cancel{n} t^{n-1} + \cdots$
(n-1)!
$= A\{E + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \cdots\}$
$= Ae^{At}$
$t + \frac{1}{2!}(at)^2 + \frac{1}{3!}(at)^3 +$
$At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n +$

$$e^{At} = E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$ 対角型

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}t + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}t^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}t^3 + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + at + \frac{a^2}{2!}t^2 + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + bt + \frac{b^2}{2!}t^2 + \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x' = ax$

$y' = by$

$B = P^{-1}AP$

Pは正則行列

$$e^{Bt} = \underbrace{E}_{P^{-1}EP} + P^{-1}APt + \frac{1}{2!}\underbrace{(P^{-1}AP)^2}_{P^{-1}A^2P}t^2 + \frac{1}{3!}\underbrace{(P^{-1}AP)^3}_{P^{-1}A^3P}t^3 +$$

$$= P^{-1}\{\underbrace{E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 +}_{e^{At}}\}P$$