無限小

$D_1 = D = \{d \in R \mid d^2 = 0\}$ 1次の無限小
$D_2 \quad = \{d \in R \mid d^3 = 0\}$ 2次の無限小
$D_3 \quad = \{d \in R \mid d^4 = 0\}$ 3次の無限小
$\vdots$
$D_n \quad = \{d \in R \mid d^{n+1} = 0\}$ n次の無限小

$d_1, d_2 \in D = D_1$

$$(d_1 + d_2)^2 = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{d_1^2} + 2d_1 d_2 + \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{d_2^2} = 2d_1 d_2$$

$$(d_1 + d_2)^3 = \sum d_1^k d_2^l \quad k + l = 3$$ ← どちらか一方は2以上！

$$= 0$$

$\Rightarrow d_1 + d_2 \in D_2$

$d_1, \cdots, d_n \in D_1 \Rightarrow d_1 + \cdots + d_n \in D_n$
$(d_1 + \cdots + d_n)^{n+1} = 0$

命題
$d_1 \in D_k,\ d_2 \in D_l \Rightarrow d_1 + d_2 \in D_{k+l}$
証明
$(d_1 + d_2)^{k+l+1} = 0 \quad \leftarrow p + q = k + l + 1 \quad p \geqq k \quad q \geqq l$
$\cdots + \Box d_1^p d_2^q + \cdots$

帰納法の事
証明 by induction on n ← 命題
$d_1, \cdots, d_n, d_{n+1} \in D_1 \Rightarrow d_1 + \cdots + d_{n+1} \in D_{n+1}$
$d_1 + \cdots + d_n \in D_n \quad d_{n+1} \in D_1 \quad D_{n+1}$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n + \cdots$$

$\rightarrow h = d \in D_n$ なら

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n$$

↘つづ

Date 5 12

$\underbrace{D_1 \times \cdots \times D_1}_{n個} \to D_n$

全射、上への射像

$(d_1, \cdots, d_n) \to d_1 + \cdots + d_n$

$f(x+d_1+\cdots+d_n) \quad d_1, \cdots, d_n \in D = D_1$

$f(x+d_1) = f(x) + f'(x) d_1$

$$\begin{aligned}
f(x+d_1+d_2) &= f(x+d_1) + f'(x+d_1) d_2 \\
&= f(x) + f'(x) d_1 + \{f'(x) + f''(x) d_1\} d_2 \\
&= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x) d_1 d_2 \\
&= f(x) + f'(x) d + \frac{f''(x)}{2} d^2
\end{aligned}$$

$\begin{cases} d_1 + d_2 = d \in D_2 \\ d_1 d_2 = (d_1+d_2)^2/2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
f(x+d_1+d_2+d_3) &= f(x+d_1+d_2) + f'(x+d_1+d_2) d_3 \\
&= \{f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x) d_1 d_2\} \\
&\quad + \{f'(x) + f''(x)(d_1+d_2) + f'''(x) d_1 d_2\} d_3 \\
&= f(x) + f'(x)(d_1+d_2+d_3) \\
&\quad + f''(x)(d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_1) + f'''(x) d_1 d_2 d_3
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} & d_1+d_2+d_3 = d \\ & d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_1 = (d_1+d_2+d_3)^2/2 \\ & d_1 d_2 d_3 = (d_1+d_2+d_3)^3/3! \end{aligned}\right)$$

$$= f(x) + f'(x) d + \frac{f''(x)}{2} d^2 + \frac{f'''(x)}{3!} d^3$$

$X_1, \cdots, X_k$ k個の変数

多項式

$X_1 X_2 + 3 X_1 X_3$ X_1 と X_3 を

$X_2 X_3 + 3 X_1 X_3$ 入れ替え

$\boxed{X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_3 X_1}$ も対称

2次の基本対称式

1次の基本対称式

$\boxed{X_1 + \cdots + X_k}$ は変化しない ⇒ 対称

順序しか変わらない

$\boxed{X_1 X_2 X_3}$ も対称

三次の基本対称式

σ_k^n : k個の変数 $X_1, \cdots, X_k$ の n次の基本対称式

$\parallel$

$\sigma_k^n(X_1, \cdots, X_k)$

Date 5 12

${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1}$ ← n+1 を含まない選び方＋含む選び方

命題 $\sigma_{k+1}^{n} = \sigma_k^{n} + X_{k+1}\sigma_k^{n-1}$ ← 考え方は一緒

(X_1, X_k, X_{k+1})

自由に使ってよい

宿題

Ⅰ $f(x+d_1+\cdots+d_k) = \sum_{n=0}^{k} f^{(n)}(x)\,\sigma_k^{n}(d_1,\cdots,d_k)$ の証明

Ⅱ $(d_1+\cdots+d_k)^n = n!\,\sigma_k^{n}(d_1,\cdots,d_k)$ 〃

締切は次週月

法則

微分方程式 ⇒ 関数

$x' = x$ $x = x(t)$ $x = e^t$ ← こういうものを特殊関数という

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2}t^2 + \cdots$$

$x(0) = C$（定数）

$x'(0) = x(0) = C$

$x''(0) = x'(0) = C$

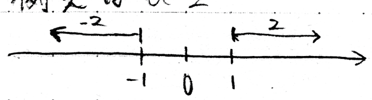
$$x(t) = C\left\{1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots\right\}$$

謎の関数 $f(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$

$f'(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots$ → $f'(t) = f(t)$

$x' = ax$ aは定数 $a > 0$

例えば $a = 2$



例えば人口の変化率

10万 → 10万＋700人（1年後）

20万 → 20万＋1400人（〃）

30万 → 30万＋2100人（〃）

例えば半減期

これに従って、$\overset{\text{マイナス}}{-}$の時 ⇒ $x' = ax$