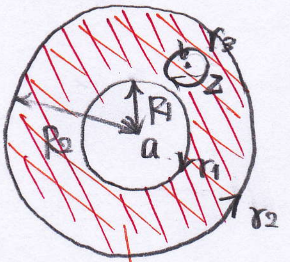


ここで f は解析的

中心 a の同心円

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid R_1 \leq |z-a| \leq R_2 \}$$

$$\gamma_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = R_2 \}$$

$$\gamma_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = R_1 \}$$

Causy の積分定理より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ で囲まれた領域　黄色の所から γ_3 で囲まれた部分を差し引く

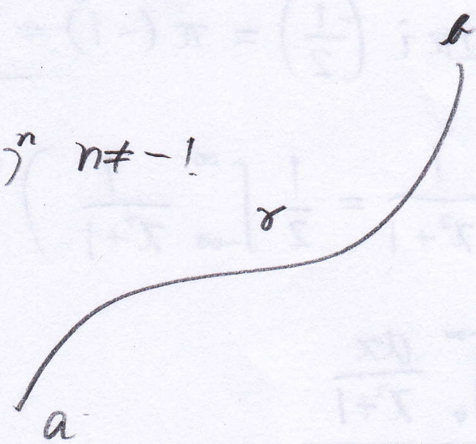
$\dfrac{f(w)}{w-z}$ 解析的　　Stokes の定理

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

黄色の所で f は解析的

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad (z-a)^n \quad n \neq -1$$

微積分学の基本定理



$$F' = f$$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(b) - F(a)$$

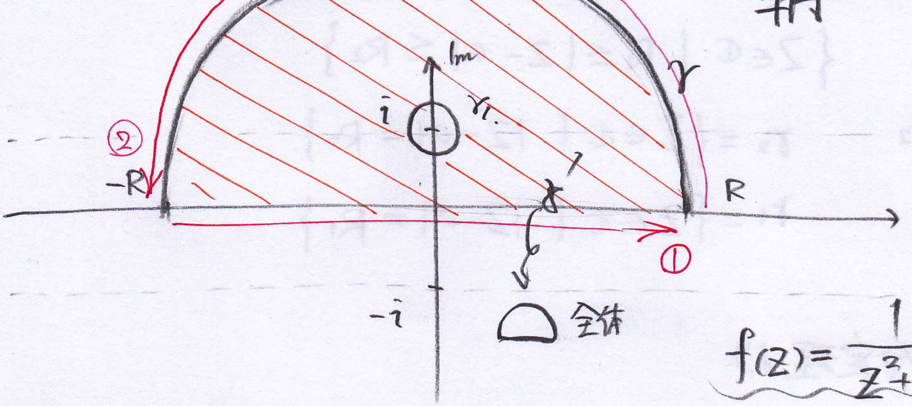
$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{x^2+1}}$$ を計算する。

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{\alpha}{z-i} + \frac{\beta}{z+i} = \frac{\alpha(z+i) + \beta(z-i)}{z^2+1}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)z + (\alpha-\beta)i}{z^2+1}$$

$$\alpha+\beta = 0. \quad \alpha - \beta = -i \qquad \therefore \alpha = -\frac{i}{2}, \ \beta = \frac{i}{2}$$

$$\frac{1}{z^2+1} = -\frac{i}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\frac{1}{z+i}$$



$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$ (が解析的であれば0)

$$= \underbrace{-\frac{i}{2}\frac{1}{z-i}}_{\text{定義されない領域をもつ}} + \underbrace{\frac{i}{2}\frac{1}{z+i}}_{\text{解析的 }0}$$

$$\underbrace{\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+1}}_{①} + \underbrace{\int_{\gamma}\frac{dz}{z^2+1}}_{②}$$

(iを中心，小さい半径r

$$\int_{\gamma}\frac{dz}{z-i} = \int_{\gamma_1}\frac{1}{z-i}\,dz \quad 2\pi i$$)

$$2\pi i\left(-\frac{i}{2}\right) = \pi(-i^2) = \pi$$ （Rに関わらず）

$$\left(\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$① = 2\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$$

$\gamma : \theta \in [0, \pi] \quad Re^{i\theta}$

$$\int_{\gamma}\frac{1}{z^2+1}\,dz = \int_0^{\pi}\frac{Rie^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^2+1}\,d\theta \to 0 \quad (R\to\infty)$$

$$\left(\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le M(b-a)\right)$$

$$\therefore \frac{\pi}{2}$$ //

レポート

問題I

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

〃 II

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$$

〃 III

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2\ dx}{x^4+x^2+1}$$

〃 IV

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a>0)$$

$\left(\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}\right.$ と同様に計算せよ)

代数学の基本定理

$$x^2+1=0$$

複素係数の1次以上の多項式 $f(x)$ に対して $f(x)=0$ は必ず解をもつ.

↓

二次式に分解

(証明) 背理法

1次以上の多項式 $f(z)$

解をもたないとして ($f(z)=0$ とならない)

$g(z) = \frac{1}{f(z)}$ — 複素平面全体で定義される

Causyの積分公式

$$f(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dz$$

微分係数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad a_1 = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^2}\,dw$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} \to 0$$

$|g(z)| \le M$　　f(z)が0に近づく → 上限があるはず!!

$\theta \in [0, 2\pi] \to a + Re^{i\theta}$

g(z)は微分すると0になる → 定数!!　$\frac{1}{f(z)} = c$

$$a_1 = \int_\gamma \frac{f(w)\,\cancel{R}}{(\quad)^2\,\cancel{R^2}}\,dw \to 0 \quad (R \to \infty)$$

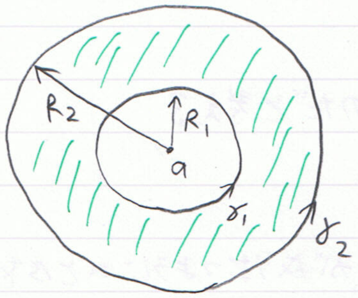
微分係数

■

複素平面論を使うと実数も扱いやすくなる。

2/23(水)3限　微積分(生物学類)

同心円



$\{z\in\mathbb{C} \mid R_1 \le |z-a| \le R_2\}$

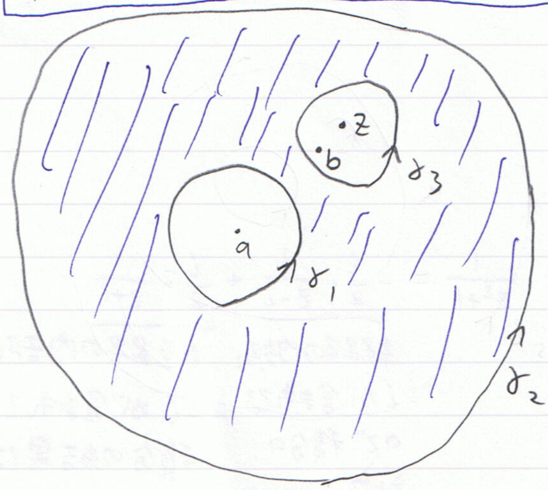
$\gamma_2 = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-a| = R_2\}$
$\gamma_1 = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-a| = R_1\}$

緑の部分で f は解析的

Cauchy の積分定理より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$\boxed{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \text{ で囲まれた領域}}$ (緑の部分から γ_3 で囲まれた部分を差し引く)



$\frac{f(w)}{w-z}$ 解析的

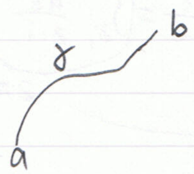
Stokes の定理

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$
$$= f(z)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

微積分学の基本定理　　$(z-a)^n,\ n \neq -1$

$F' = f$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a)$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{x^2+1}}$$

$\frac{1}{z^2+1}$ 複素数の関数を実数に制限したものだと考える

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{\alpha}{z-i} + \frac{\beta}{z+i} = \frac{\alpha(z+i)+\beta(z-i)}{z^2+1}$$ が成り立つように α と β を定める

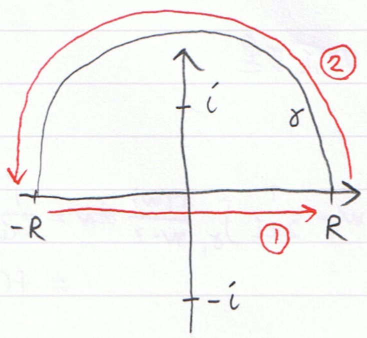
$$= \frac{(\alpha+\beta)z + (\alpha-\beta)i}{z^2+1}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \alpha-\beta = -i \end{cases}$$

$\beta = -\alpha$ を代入

$$2\alpha = -i$$
$$\alpha = -\frac{i}{2}$$
$$\beta = \frac{i}{2}$$

$$\frac{1}{z^2+1} = -\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z+i}$$

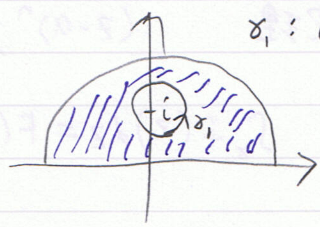


半円

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \underbrace{-\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}}_{\text{経路の内部に }i\text{ が含まれてるので積分の計算に工夫が必要}} + \underbrace{\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z+i}}_{\text{経路の内部に }-i\text{ が含まれてないので積分の結果は }0}$$

$$\underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1}}_{①} + \underbrace{\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}}_{②}$$

γ_1 : i を中心に小さい半径 r



$$\int_\gamma \frac{dz}{z-i} = \underbrace{\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-i}}_{2\pi i}$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{i}{2}\right) = \pi(-i^2) = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$$

$\gamma : \theta \in [0,\pi] \longmapsto Re^{i\theta}$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = \int_0^\pi \frac{Rie^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^2+1} d\theta$$

$$|f(x)| \leq M$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a)$$

$$\frac{Rie^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1} \sim \frac{1}{R}$$ Rが大きくなると0に近づく

レポート I	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$	
II	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}$	
III	$\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{x^4+x^2+1}$	
IV	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$	$(a>0)$

代数学の基本定理

$x^2+1=0$

複素係数の1次以上の多項式 $f(x)$ に対して、

$f(x)=0$ は必ず解をもつ

$\Downarrow$

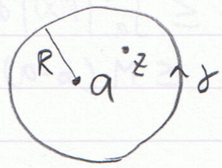
1次式に分解

証明
背理法
1次以上の多項式 $f(z)$ は解を持たない と仮定する

$g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 複素平面全体で定義されている

Cauchy の積分公式

$f(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dz$



$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$

$\underline{a_1} = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw$
微分係数

$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}$

zが大きくなると 0に近づく

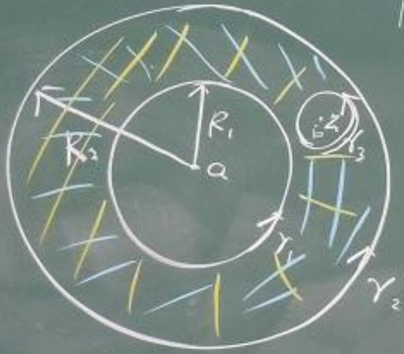
$|g(z)| \leq M$

$\theta \in [0, 2\pi] \longmapsto a + Re^{i\theta}$

$a_1 = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw$ $\frac{R}{R^2}$ Rを大きくとると 0に近づく

微分係数がどこでも0なので $\frac{1}{f(z)} = C$
$f(z) = C$ ということが分かり、$f(z)$ が多項式であるという仮定に反するので
$f(z)$ は解を持つことが示された

同心円



$$\{ z\in\mathbb{C} \mid R_1 \le |z-a| \le R_2 \}$$

$$\gamma_2 = \{ z\in\mathbb{C} \mid |z-a| = R_2 \}$$

$$\gamma_1 = \{ z\in\mathbb{C} \mid |z-a| = R_1 \}$$

黄色の所で f は解析的

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Cauchyの積分定理より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$ で囲まれた領域
黄色の所から γ_3 で囲まれた部分を差し引く

$\dfrac{f(w)}{w-z}$ 解析的　　Stokesの定理

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \qquad (z-a)^n \qquad n \neq -1$$

$$z^2+1=(z-i)(z+i)$$

微積分学の基本定理

$$F' = f \qquad \int_\gamma f(z)\,dz = F(b)-F(a)$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{dx}{x^2+1}}$$

$$\beta = \frac{i}{2}, \qquad \alpha = -\frac{i}{2}$$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{\alpha}{z-i} + \frac{\beta}{z+i} = \frac{\alpha(z+i)+\beta(z-}{z^2+1}$$

$$= -\frac{i}{2}\,\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\,\frac{1}{z+i}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{dx}{x^2+1}$$

$\beta = \frac{i}{2}$ α, β

$\alpha = -\frac{i}{2}$

$\beta = -\alpha$

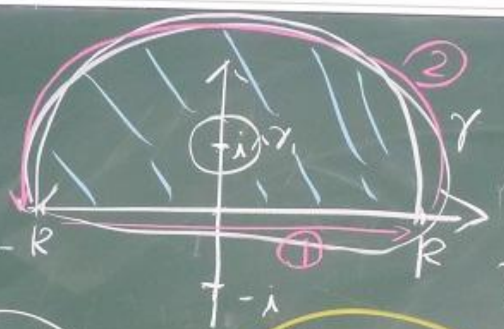
$\alpha+\beta = 0$

$\alpha-\beta = -i$

$2\alpha = -i$

$$\cdots + \frac{\beta}{z+i} = \frac{\alpha(z+i)+\beta(z-i)}{z^2+1} = \frac{(\alpha+\beta)z+i(\alpha-\beta)}{z^2+1}$$

$$\frac{1}{\cdots-i} + \frac{i}{2}\frac{1}{z+i}$$



半円

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = (- \cdots$$

γ'

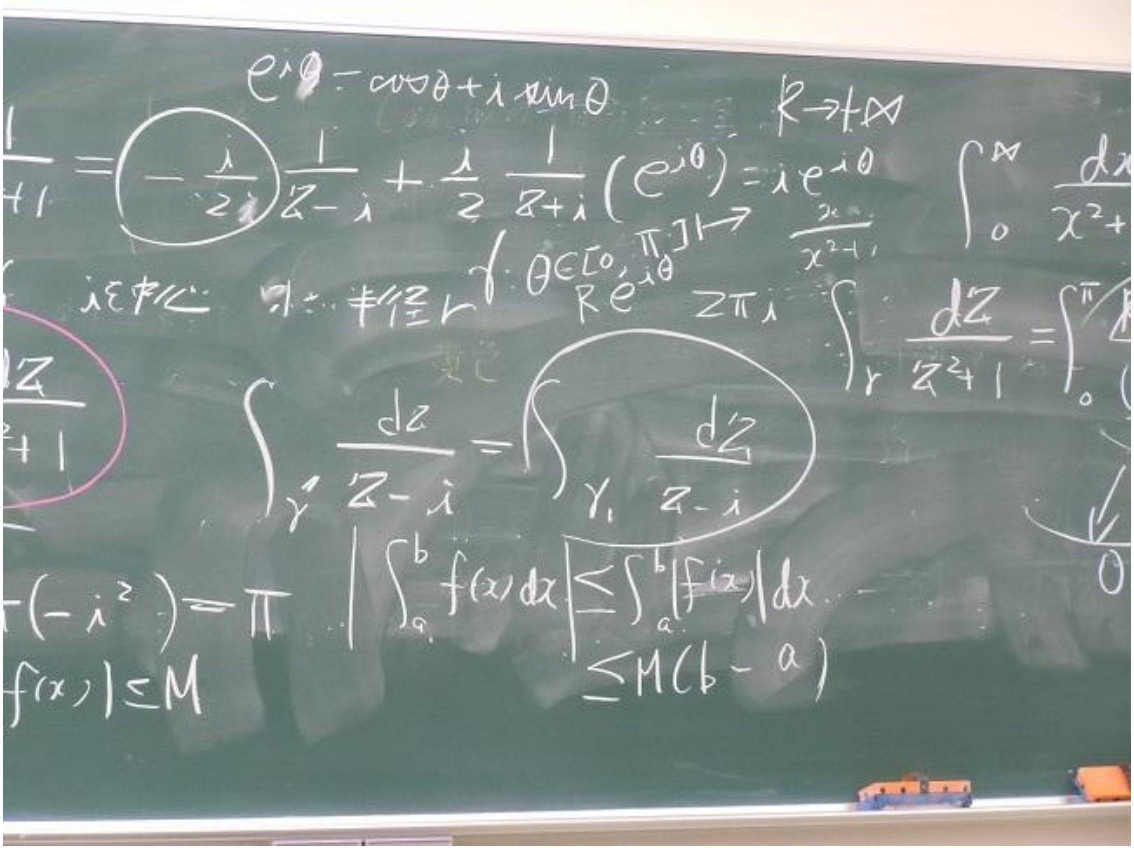
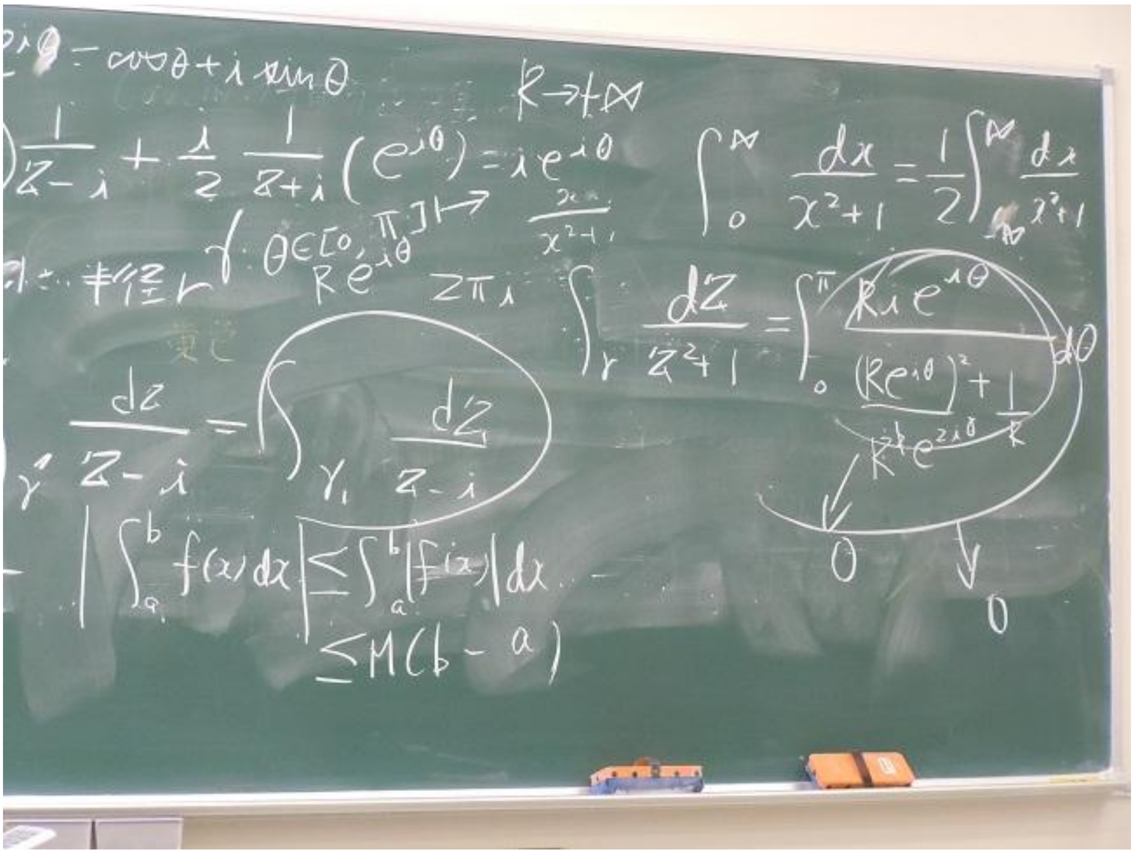
γ_1 iを中心

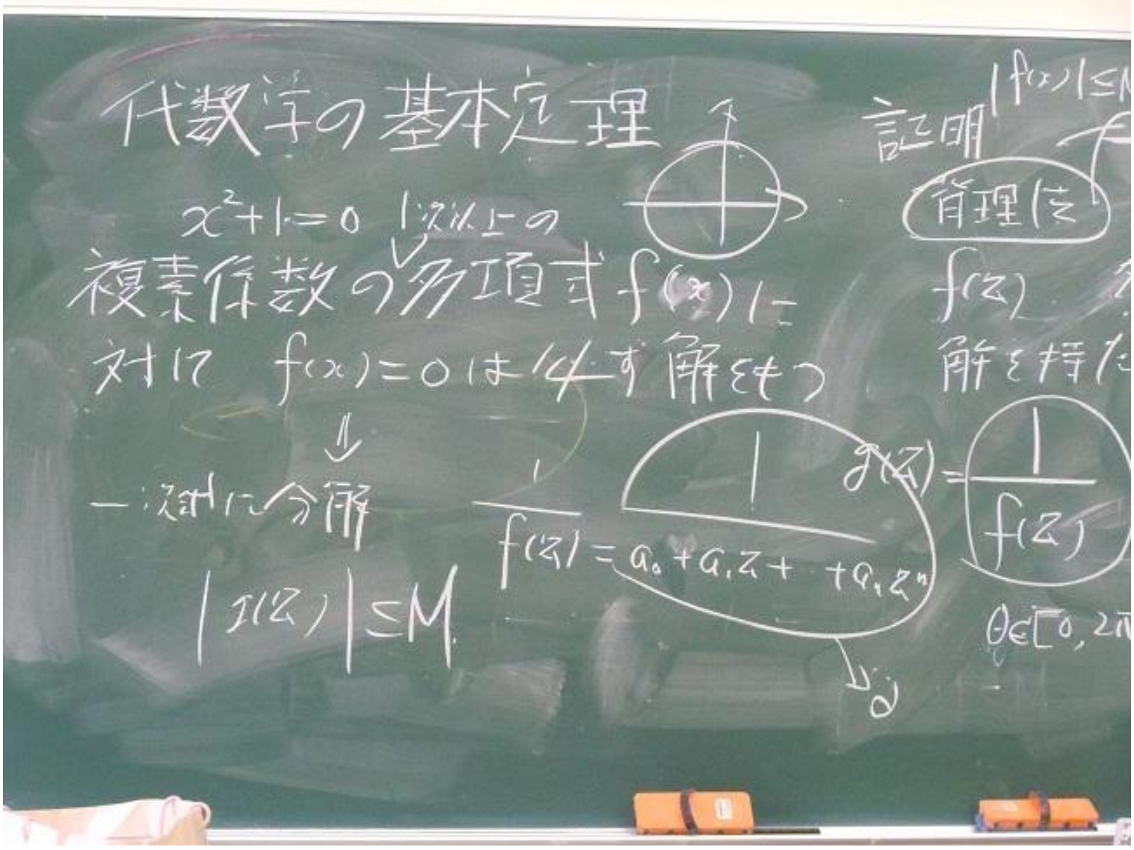
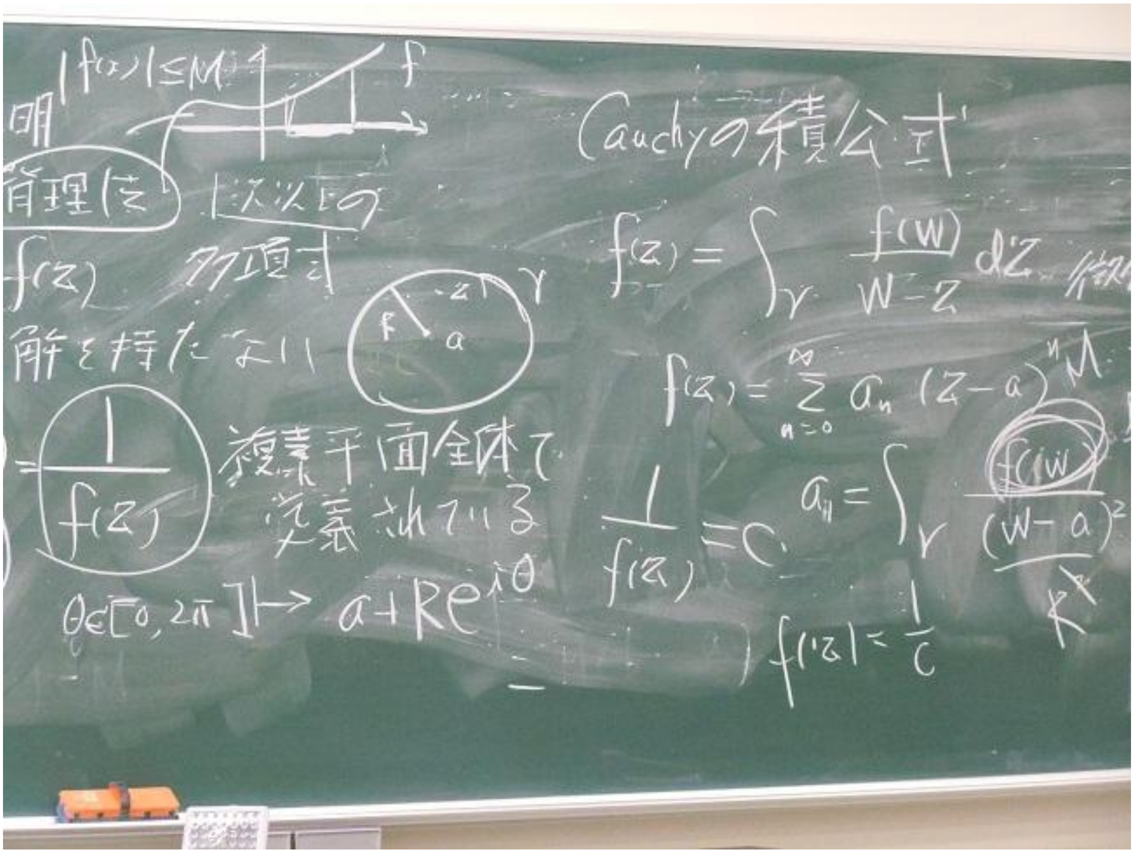
$$\int^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \Leftarrow \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} + \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$$

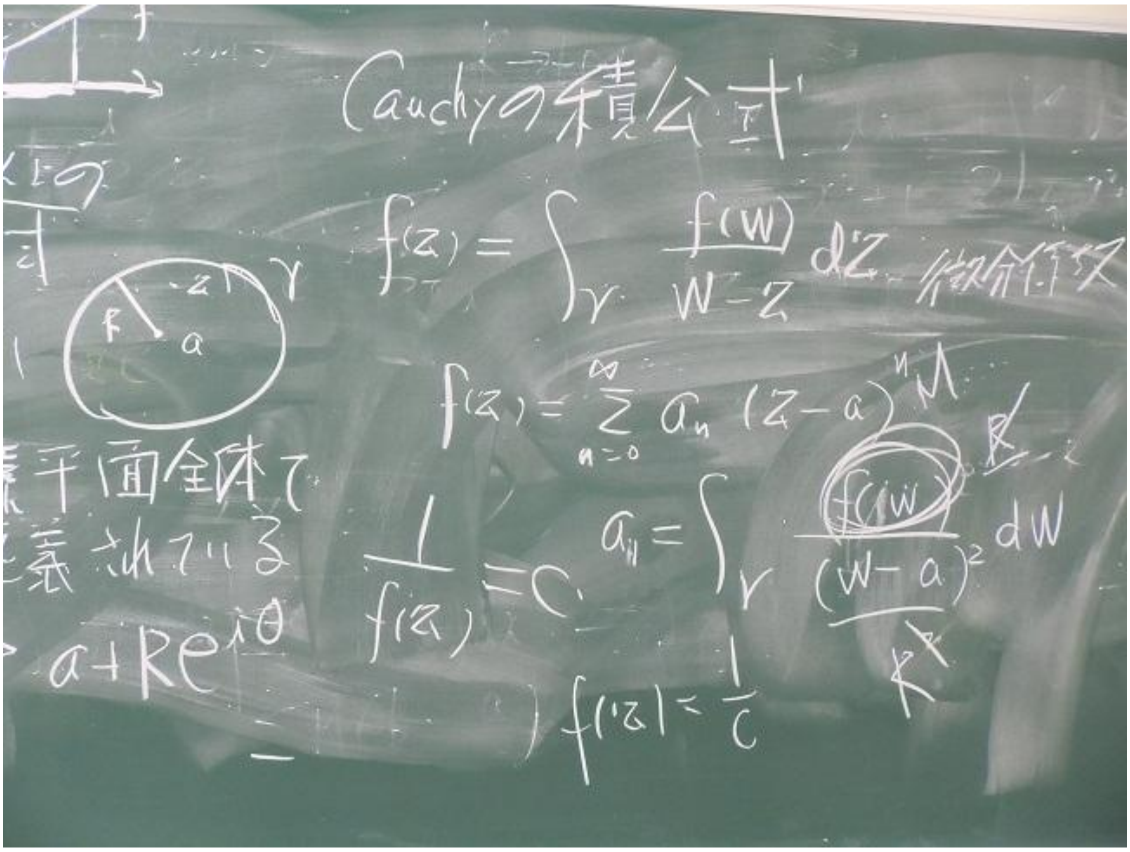
①

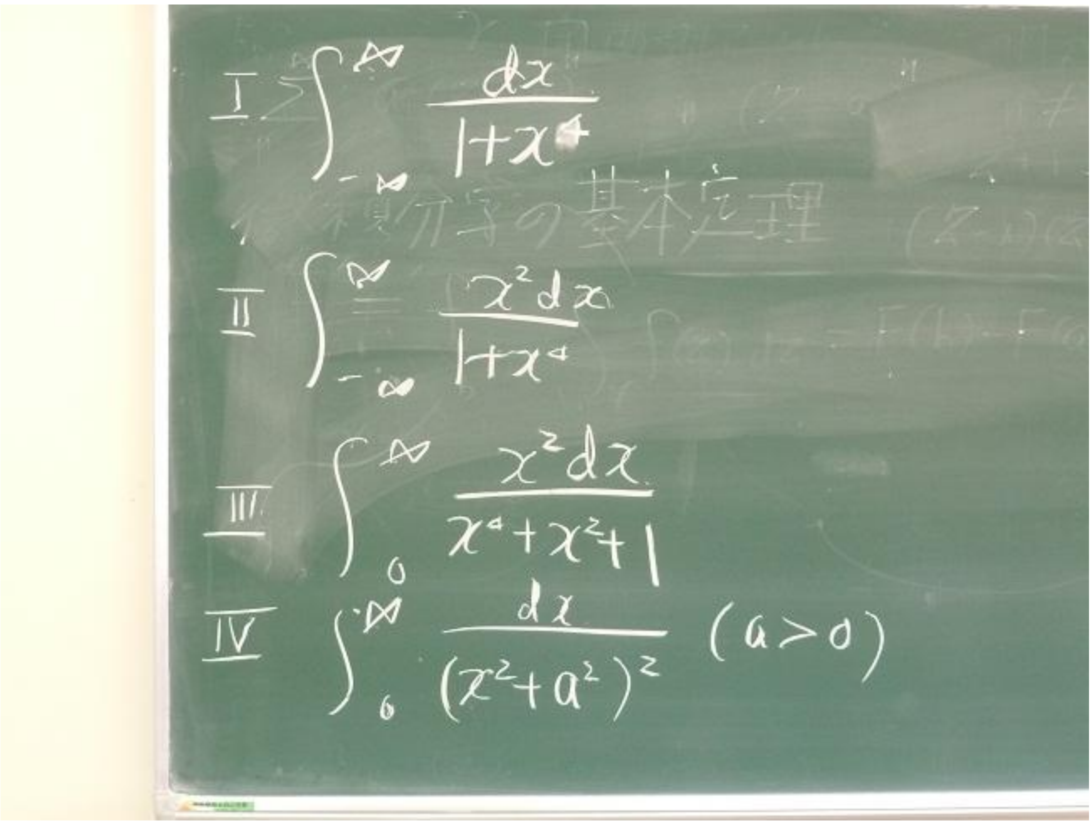
$$= 2\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i\left(-\frac{i}{2}\right) = \pi(-i^2) = \cdots$$

$|f(x)| \le M$


e^{iθ} = cos θ + i sin θ
R → +∞
(−i/2) 1/(z−i) + i/2 1/(z+i)
(e^{iθ}) = i e^{iθ}
γ θ ∈ [0, π] ↦ Re^{iθ}
iを中心 半径r
2πi
黄色
∫_γ dz/(z−i) = ∫_{γ1} dz/(z−i)
∫_γ dz/(z²+1)
|∫_a^b f(x) dx| ≤ ∫_a^b |f(x)| dx ≤ M(b−a)
(−i²) = π
|f(x)| ≤ M
0

e^{iθ} = cos θ + i sin θ
R → +∞
1/(z−i) + i/2 1/(z+i)
(e^{iθ}) = i e^{iθ}
γ θ ∈ [0, π] ↦ Re^{iθ}
半径r
2πi
黄色
∫_0^∞ dx/(x²+1) = 1/2 ∫_{−∞}^∞ dx/(x²+1)
∫_γ dz/(z²+1) = ∫_0^π Ri e^{iθ}/((Re^{iθ})²+1) dθ
R² e^{2iθ}
1/R
0
0
dz/(z−i) = ∫_{γ1} dz/(z−i)
|∫_a^b f(x) dx| ≤ ∫_a^b |f(x)| dx ≤ M(b−a)


代数学の基本定理
x²+1=0
1次以上の
複素係数の多項式f(x)に
対して f(x)=0は必ず解をもつ
一次式に分解
|f(z)|≦M
証明
背理法
f(z)
解を持た
g(z)=1/f(z)
f(z)=a₀+a₁z+ +aₙzⁿ
θ∈[0,2π

明 |f(x)|≦M
背理法 1次以上の
f(z) 多項式
解を持たない
=1/f(z)
複素平面全体で
微分されている
θ∈[0,2π]↦a+Re^{iθ}
Cauchyの積分公式
f(z)=∫γ f(w)/(w−z) dz
f(z)=Σ aₙ(z−a)ⁿ
aₙ=∫γ f(w)/(w−a)²
1/f(z)=C
f(z)=1/C


Cauchyの積分公式
$f(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dz$
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$
$a_n = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^2} dW$
$\frac{1}{f(z)} = c$
$f(z) = \frac{1}{c}$
平面全体で
定義されている
$a+Re^{i\theta}$


I $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$
II $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$
III $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+x^2+1}$
IV $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ $(a>0)$