2011. 2. 2. Wed.

微積分

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\quad\ \ \cap$

$\quad x+iy$

実部　虚部

$f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ の線型空間

積が入っている。

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f'(x,y) = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ 2×2の行列

$(\alpha+i\beta)(x+iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

$f'(x+iy) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$　　$u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y \\ v_x &= -u_y \end{aligned}\right\}$$

(仏) (独)

Cauchy-Riemannの方程式　<u>解析関数</u>

$\alpha + i\beta = u_x - iu_y \quad = u_x + iv_x$

$\quad = v_y + iv_x$

$\quad = f'(x+iy)$　<u>微分係数</u>

$\quad\quad\ \ \cap$

$\quad\quad\ \ \mathbb{C}$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 解析 analytic

$f' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Cauchy Riemann が成り立つか？

$f'(x+iy) = u_x(x+iy) - iu_y(x+iy)$

$\overline{u} = u_x \quad \overline{v} = -u_y$ v_x

$\overline{u_x} = u_{xx} \quad \left(= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}\right)$

$= v_{yx}$

$\overline{v_y} = -u_{yy}$

$= v_{xy}$

$\overline{u_x} = \overline{v_y}$ //

$\overline{v_x} = (-u_y)_x$

$= -u_{yx}$

$\overline{u_y} = u_{xy}$

$\overline{v_x} = -\overline{u_y}$ //

∴ 解析関数は何回微分しても解析関数である。

道に沿う積分

ベクトル解析　2次元（平面）で考える.

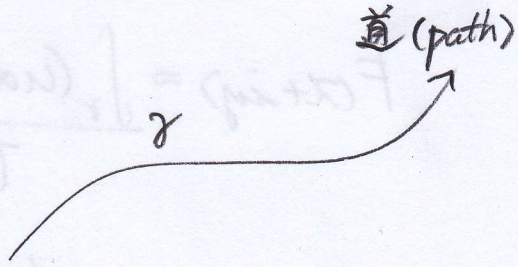
ベクトル場

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

線積分

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_\gamma u\,dx + v\,dy$$

内積



$$(u+iv)(dx+i\,dy) = (u\,dx - v\,dy) + i\,(v\,dx + u\,dy)$$

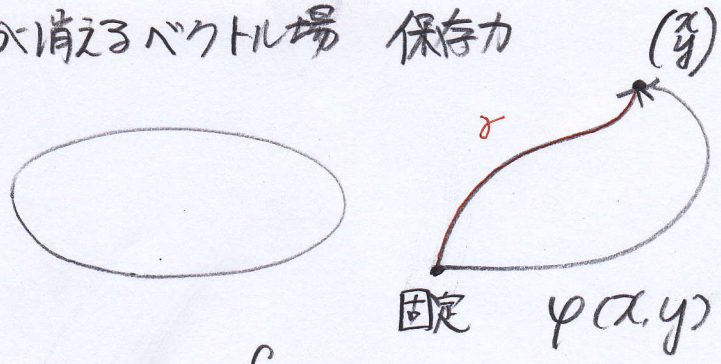
複素数の積

$$f = u + iv$$

$$\int_\gamma f\,dz \quad (dz = dx + i\,dy)$$

$$= \underbrace{\int_\gamma (u\,dx - v\,dy)}_{\text{実部}} + i\underbrace{\int_\gamma (v\,dx + u\,dy)}_{\text{虚部}}$$

rotが消えるベクトル場　保存力



道によらない

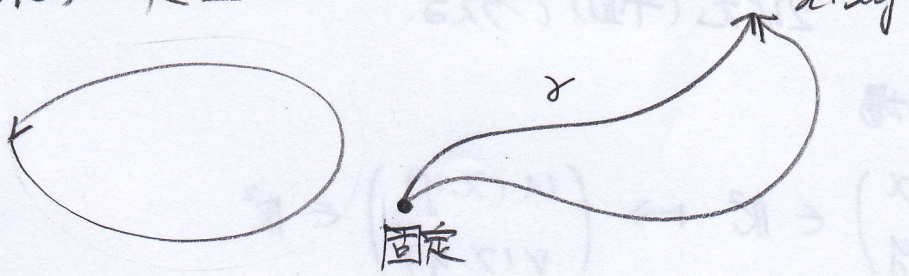
$$\varphi(x,y) = \int_\gamma (u\,dx + v\,dy)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v$$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 解析関数

stokesの定理



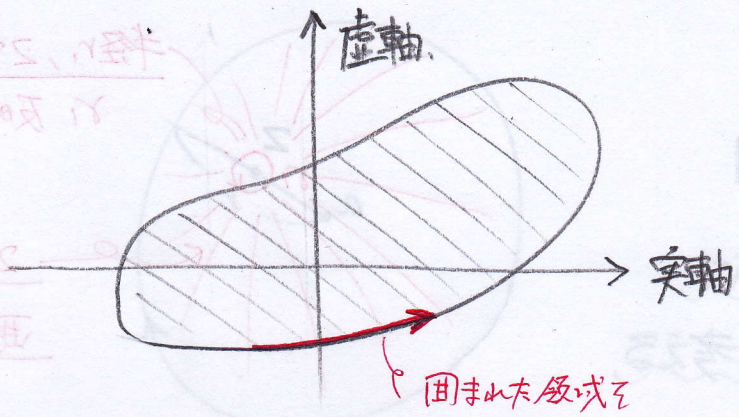
$$F(x+iy) = \underbrace{\int_\gamma (u\,dx - v\,dy)}_{U} + i\underbrace{\int_\gamma (v\,dx + u\,dy)}_{V}$$

$$\begin{cases} U_x = u \\ U_y = -v \\ V_x = v \\ V_y = u \end{cases}$$

$F' = f$

解析関数があったらその原始関数F'も解析的である。

$\mathbb{C}$



div 0.

閉曲面で囲まれた領域

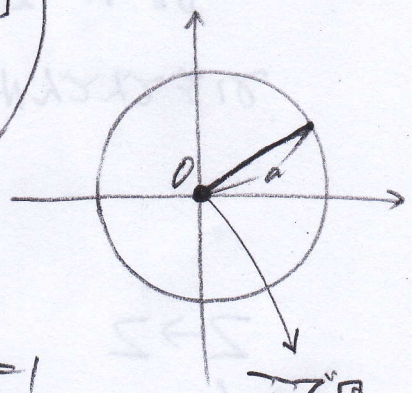
Gaussの発散定理を使うためには閉曲面内でもベクトル場が定義されていなければならない

閉曲線で囲まれた領域.

$$\frac{1}{z} \quad \mathbb{C}-\{0\} \to \mathbb{C}$$

(0では関数$\frac{1}{z}$は定義されない)

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz \qquad \left(\begin{array}{l}\gamma : ae^{i\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\end{array}\right)$$



ここでは定義されていない

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin\theta + i\cos\theta)\,a}{(\cos\theta + i\sin\theta)\,a}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin\theta + i\cos\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)\,d\theta \qquad z\bar{z} = 1 \quad \therefore \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cancel{-\cos\theta\sin\theta} + i\sin^2\theta + i\cos^2\theta \cancel{+\cos\theta\sin\theta})\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} i(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} i\,d\theta$$

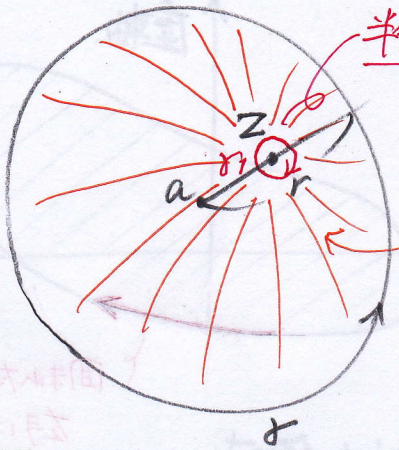
$$= 2\pi i$$

$a \in \mathbb{C}$

aを中心，半径rの円

円の内部と円周上では，

解析的な関数fを考える



半径r_1，z中心

γ_1 反時計

2つの閉曲線で

囲まれる領域．

解析的

w, z; この円の内部のzについては

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$ z以外では解析的

(証明)

zは固定

$$w \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$$

z中心，半径r_1の円．

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} = 0$$

γ_1をどんどん小さくしていくと… $f(w) \to f(z)$

$$f(z)\int_{\gamma_1} \frac{dw}{w-z} \quad 2\pi i$$

$z \to z$

多項式

sin, cos → 巾級数

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1$$

$$\frac{f(w)}{w-z}$$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}$$

$$= \frac{1}{w-a}\left(1+\frac{z-a}{w-a}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^3+\cdots\right)$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{f(w)}{w-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\,dw.$$

狭い円の内部では冪級数が出てくる.