静電場 $\mathbb{E}$

閉曲線Σで囲まれる領域Ω

Gaussの法則（積分形） $\int_{\Sigma} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \int_{\Omega} Q \, dV$

Gaussの発散定理 $\int_{\Sigma} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \int \mathrm{div}\,\mathbb{E} \, dV$

∴ Gaussの法則（微分形） $\mathrm{div}\,\mathbb{E} = Q$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ への
線形写像

$$\mathbb{E} = \mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{E} = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = 0 \quad (\because \mathrm{rot}\cdot\mathrm{grad} = 0$$

静磁場 $\mathbb{B}$

閉曲線r，各点での電荷密度ρ，速度 $\mathbb{V}$，$\mathbb{J} = \rho \mathbb{V}$，閉曲線rを縁とする曲面S

Ampereの法則 $\int_r \mathbb{B} \cdot d\mathbb{r} = \int_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S}$（積分形）

stokesの定理 $\int_r \mathbb{B} \cdot d\mathbb{r} = \int_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S}$

Ampereの法則 $\mathrm{rot}\,\mathbb{B} = \mathbb{J}$（微分形）

<Report>

ビオ・バザールの法則 "$\mathrm{div}\,\mathbb{B} = 0$" を示せ．(I.)

Maxwell方程式

電磁波 ～ 光の速さ

多変数の微分

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

(x, y)

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

F' $\quad F((x+y)+(a,b)d) = F(x,y) + \underline{F'(x,y)}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} d$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$への
線形写像

$$F'(x,y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

①

$\mathbb{C}$：複素数

$x + iy$ （x, yは実数，$i^2 = -1$）

$F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$にはかけ算がある。

$x + iy \longmapsto (\alpha + i\beta)(x+iy)$ 　線形写像 （α, β：実数）

$\mathbb{C} \in \mathbb{R}^2$ 　　　　$\mathbb{C} \in \mathbb{R}^2$

$$= (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \boxed{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

②

$x + iy \longmapsto f(x+iy) + i g(x+iy)$ 　$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\in \mathbb{C}$

$$f((x+iy)+(a+bi)d) = f(x+iy) + ig(x+iy) + ?(a+bi)d$$

$\to F'(x+iy)$

①，②より，

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right\}$$

"Cauchy-Riemannの方程式"

点 $x+iy$ で解析的

すべての点で解析的な関数 $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ： 解析関数

解析的な関数での微分係数

$$F'(x+iy) = \frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} + i\frac{\partial g}{\partial x} \quad \in \mathbb{C}$$

<u>命題</u>： F, G が解析関数 $\rightarrow$ $F+G$; analytic (解析的)

$$(F+G)' = F' + G'$$

$$F(x+iy+a+bi)d) = F(x+iy) + F'(x+iy)(a+bi)d$$

$$+)\ G(x+iy+a+bi)d) = G(x+iy) + G'(x+iy)(a+bi)d$$

$$F(\quad) + G(\quad) = F(x+iy) + G(x+iy) + \{F'(x+iy) + G'(x+iy)\}(a+bi)d$$

<u>命題</u> F: analytic $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ (レポートⅡ)

$\rightarrow \alpha F$: analytic

$$((\alpha+i\beta)F)' = (\alpha+i\beta)F'$$

<u>命題</u> $\left.\begin{matrix}F\\G\end{matrix}\right\}$ analytic $\rightarrow$ FG も analytic で

$$(FG)' = F'G + FG'$$

$$F(\quad) = F(\quad) + F'(\quad)(\quad)d$$

$$\times)\ G(\quad) = G(\quad) + G'(\quad)(\quad)d$$

$$F(\ )G(\ ) = FG'd + F'Gd + FG + F'G'\,dd$$

↳消える

<u>命題</u> $G \neq 0$ $\quad \left(\frac{F}{G}\right)' = \frac{F'G - FG'}{G^2}$ (レポートⅢ)

$$F : \underset{\in \mathbb{C}}{x+iy} \mapsto \alpha + i\beta$$ (定数関数)

$$F(x+iy+(a+i\beta)) = \alpha + i\beta$$

$$F(x+iy) = \alpha + i\beta$$

$$F' = 0$$

$$F : \overset{\in \mathbb{C}}{\underset{z}{x+iy}} \mapsto \underset{z}{x+iy}$$

$$F(x+iy+(a+ib)d) = x+iy+(a+ib)d$$

$$F(x+iy) = x+iy$$

$$F' = 1$$

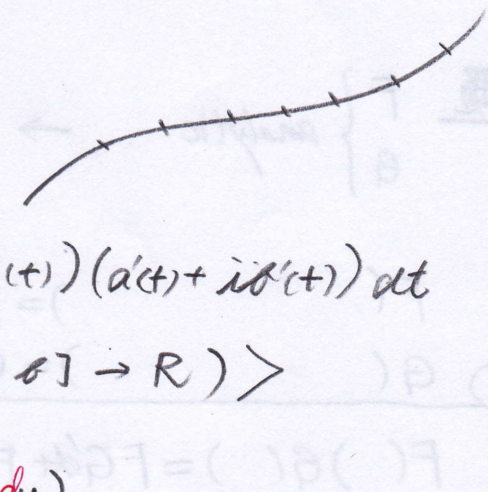
$$F : \underset{\subset \mathbb{C}}{z} \mapsto z^n \ : \ \text{analytic}$$ (レポートIV)

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

$$\left(\begin{array}{l} \sin z = z\text{の多項式} \\ \cos z = z\text{の多項式} \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} (\sin z)' = \cos z \\ (\cos z)' = -\sin z \end{array}$$

解析関数F

$$\gamma : \underset{\ni t}{[a, b]} \to \mathbb{C}$$



$$\int_\gamma F$$ 線積分 $$= \int_a^b F(a(t)+ib(t))(a'(t)+ib'(t))\,dt$$

$$\langle \gamma(t) = a(t)+ib(t) \quad (a, b : [a, b] \to \mathbb{R}) \rangle$$

$$= \int F(dx + i\,dy)$$

$$\left(\begin{array}{l} dx = x'(t)\,dt \\ dy = y'(t)\,dt \end{array} \right)$$

$\mathbb{C}$上に閉曲線γを考える

$$\int_\gamma (f+ig)(dx+idy) = \int_\gamma (fdx - gdy) + i(gdx + fdy)$$

(stokesの定理) $$= \int_\Sigma d(fdx - gdy) + id(gdx + fdx)$$

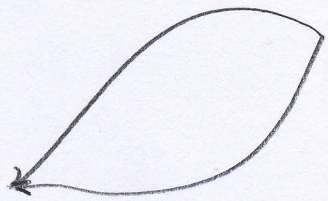
$$d(fdx - dy)$$

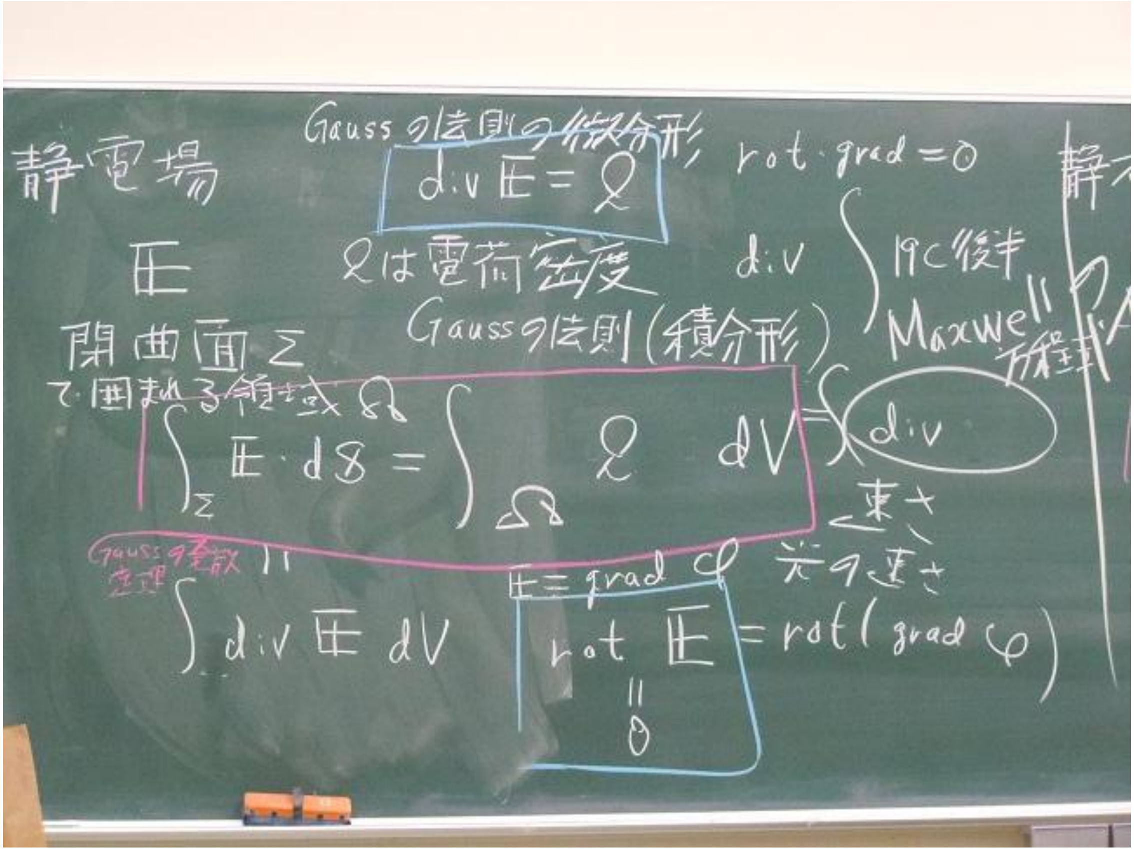
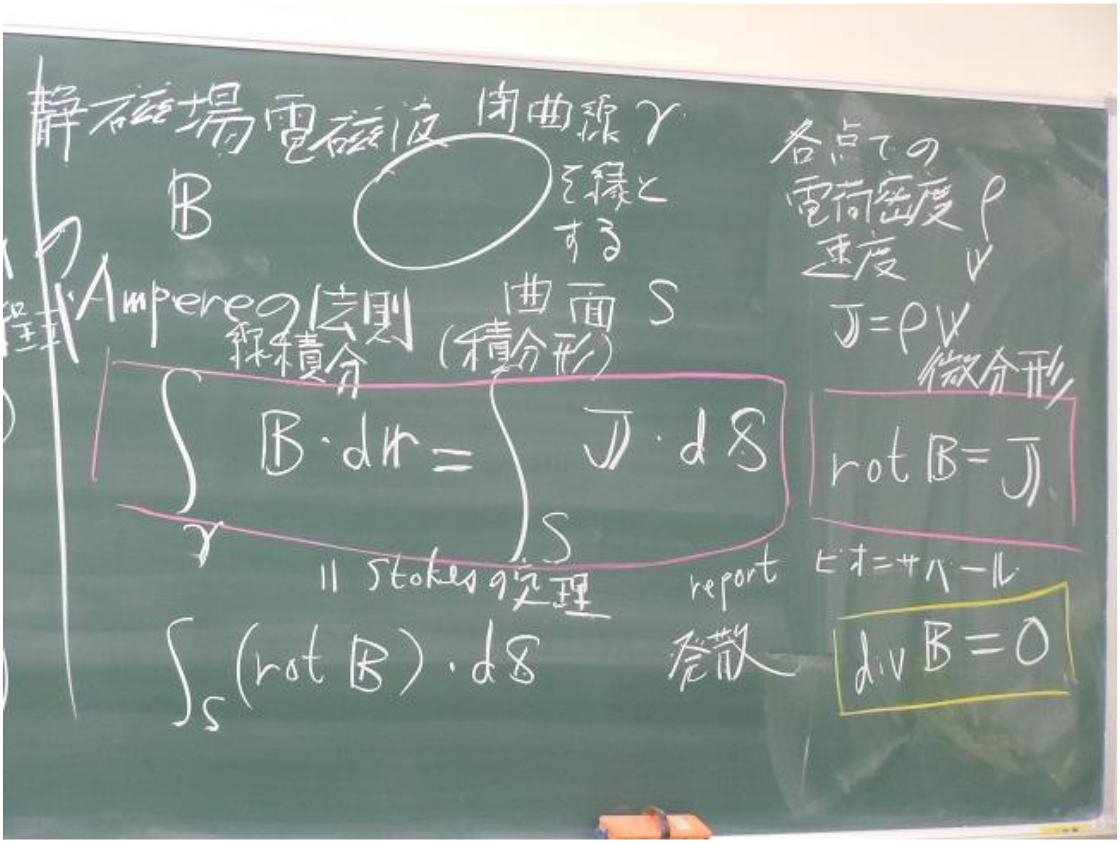
$$= \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx - \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)} dx \wedge dy$$

$$= 0$$

pass によらない




Gaussの法則の微分形
静電場
div E = ρ
rot·grad = 0
E
ρは電荷密度
div
19C後半
Maxwellの方程式
閉曲面Σ
Gaussの法則(積分形)
で囲まれる領域Ω
∫Σ E·dS = ∫Ω ρ dV
div
速さ
光の速さ
Gaussの発散定理
E = grad φ
∫ div E dV
rot E = rot(grad φ)
0

静磁場
電磁波
閉曲線γ
を縁とする
B
各点での
電荷密度ρ
速度v
Ampereの法則
曲面S
線積分
(積分形)
J = ρv
微分形
∫γ B·dr = ∫S J·dS
rot B = J
Stokesの定理
report
ビオ=サバール
∫S (rot B)·dS
発散
div B = 0

1.7 変数の微分

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

(x, y)

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

$d \in D$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

F'

$$F((x, y) + (a, b)d) = F(x, y) + \underbrace{F'(x, y)}_{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{への線形写像}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} d$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\mathbb{C}$ 複素数　$F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$x+iy$　　x, yは実数　$i^2=-1$

(x, y)

$\mathbb{C}$には掛け算がある　α, βは実数

$$\underset{\mathbb{C}=\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{x+iy}} \longmapsto (\alpha+i\beta)\underset{\mathbb{C}=\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{(x+iy)}}$$ 線形写像

$$= (\alpha x-\beta y)+i(\beta x+\alpha y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \boxed{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$F: \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{x+iy}} \longmapsto f(x+iy)+i\overset{\mathbb{R}}{g}(x+iy)$$

$\alpha+i\beta$

$d \in D$

$a+bi \in \mathbb{C}$

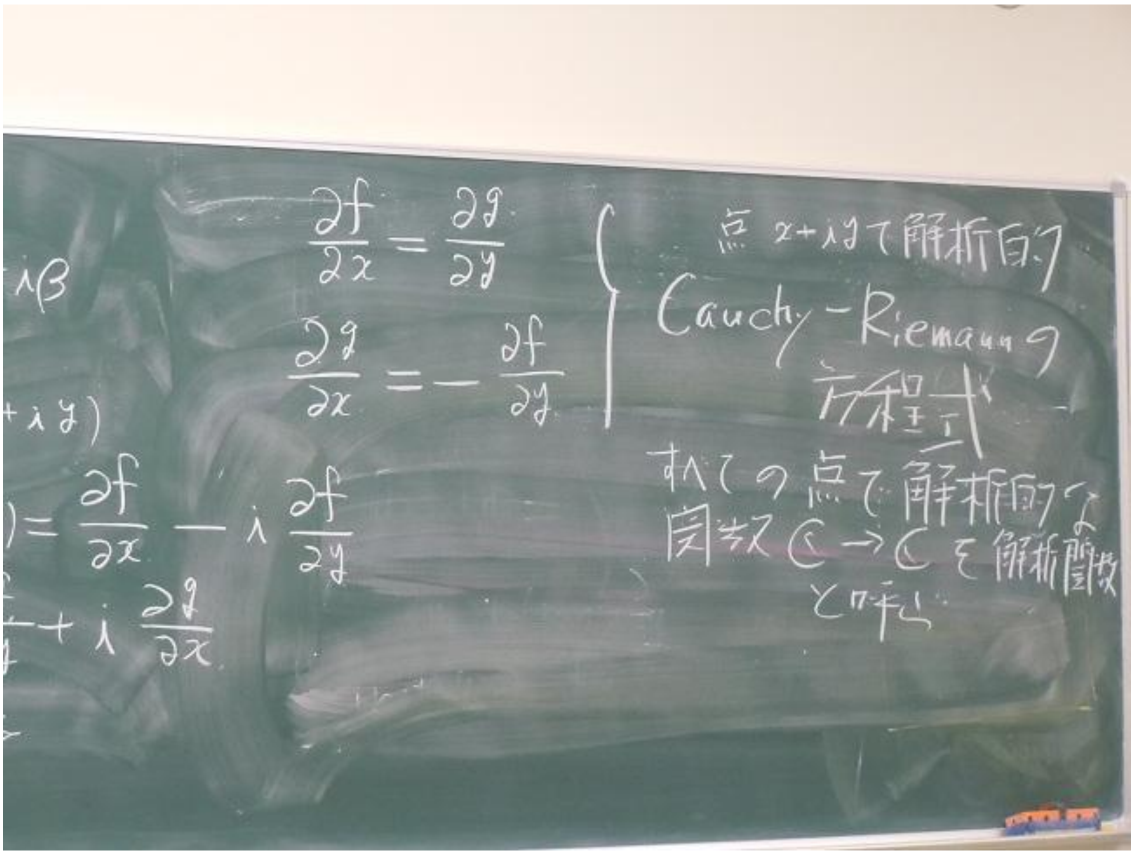
$$F((x+iy)+(a+bi)d) = f(x+iy)+ig(x+iy) + \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{?}}\,(a+bi)d$$

$$\mathbb{C} \ni F'(x+iy) = \frac{\partial f}{\partial x} -$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y} + i\frac{\partial g}{\partial x}$$

微分係数

$F'(x+iy)$



$i\beta$

$+iy)$

$) = \dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}$

$+ i\dfrac{\partial g}{\partial x}$

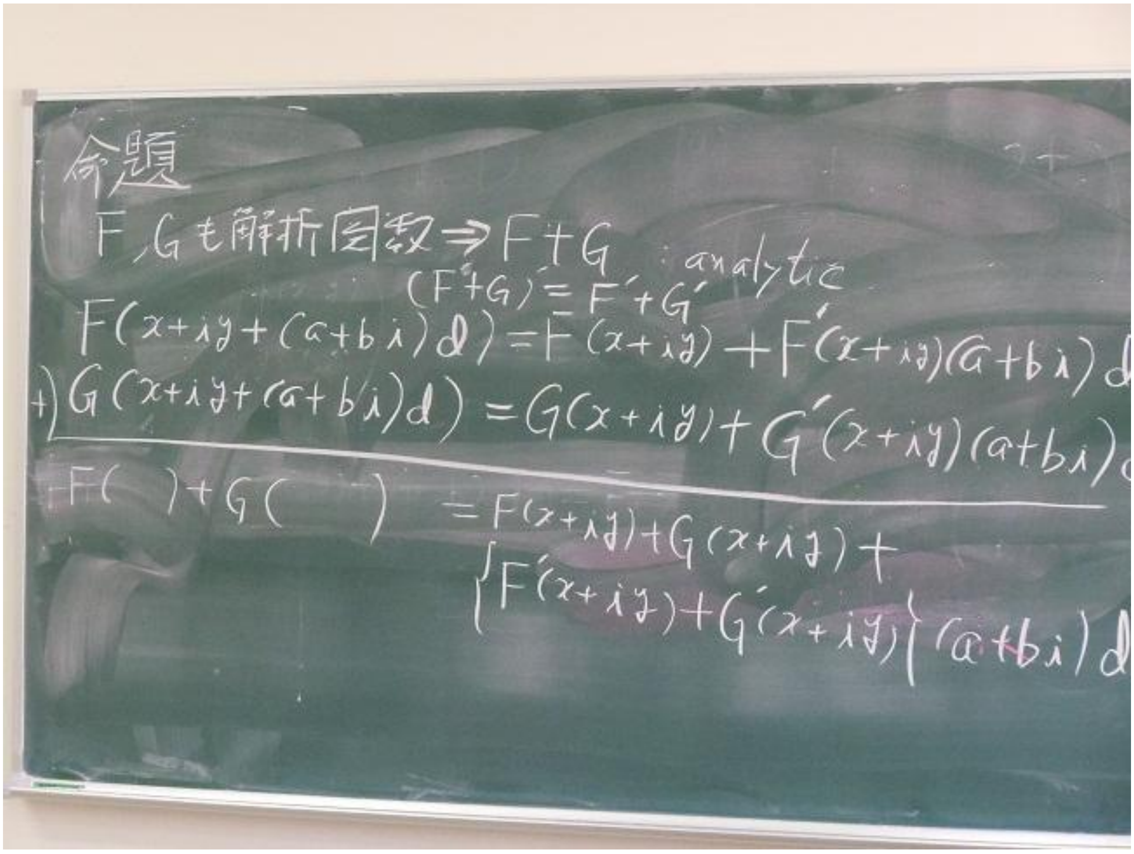
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

点 $x+iy$ で解析的

Cauchy-Riemannの方程式

すべての点で解析的な関数 $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を解析関数と呼ぶ



命題

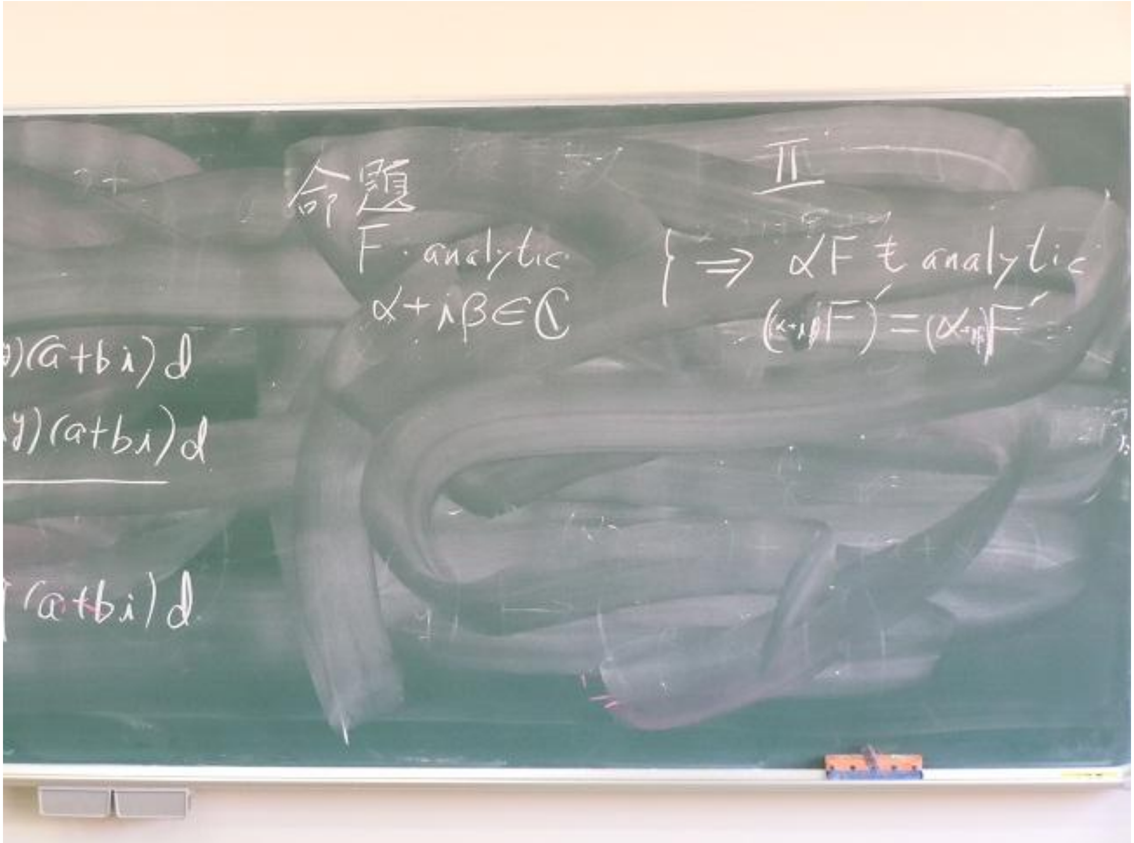
F, G も解析関数 $\Rightarrow F+G$ analytic

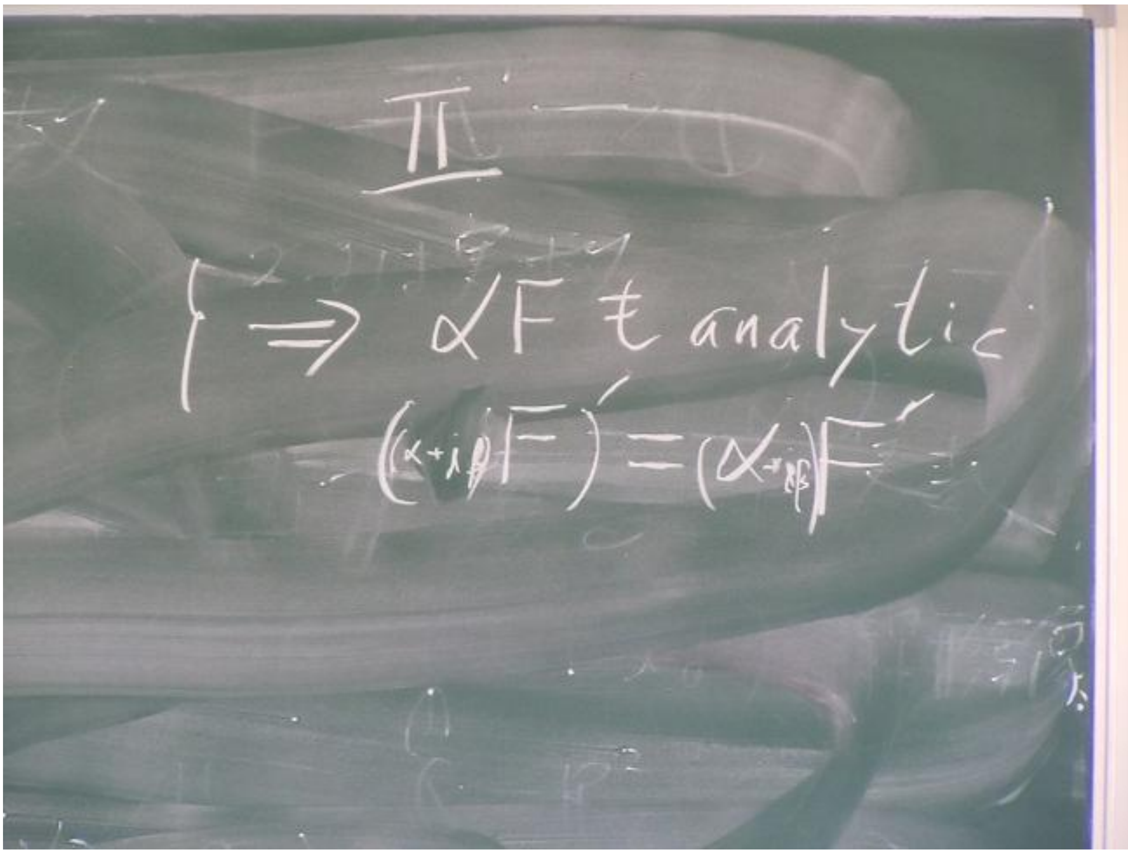
$(F+G)' = F' + G'$

$$F(x+iy+(a+bi)d) = F(x+iy) + F'(x+iy)(a+bi)d$$

$$+)\ G(x+iy+(a+bi)d) = G(x+iy) + G'(x+iy)(a+bi)d$$

$$F(\quad) + G(\quad) = F(x+iy) + G(x+iy) + \{F'(x+iy) + G'(x+iy)\}(a+bi)d$$


命題
F analytic
$\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$
II
$\Rightarrow$ αF も analytic
$((\alpha+i\beta)F)' = (\alpha+i\beta)F'$
$(a+bi)d$
$(a+bi)d$
$(a+bi)d$


II
$\Rightarrow$ αF も analytic
$((\alpha+i\beta)F)' = (\alpha+i\beta)F'$

$F: x+iy \to \alpha+i\beta$ (定数関数

$\in$

$\mathbb{C}$

$F(x+iy+(a+ib)d) = x+iy+(a+ib)d$

$F(x+iy) = x+iy$

$F' = 0$

$\underline{x+iy} \to \underline{x+iy}$ analytic

$z \qquad z$

$\in$

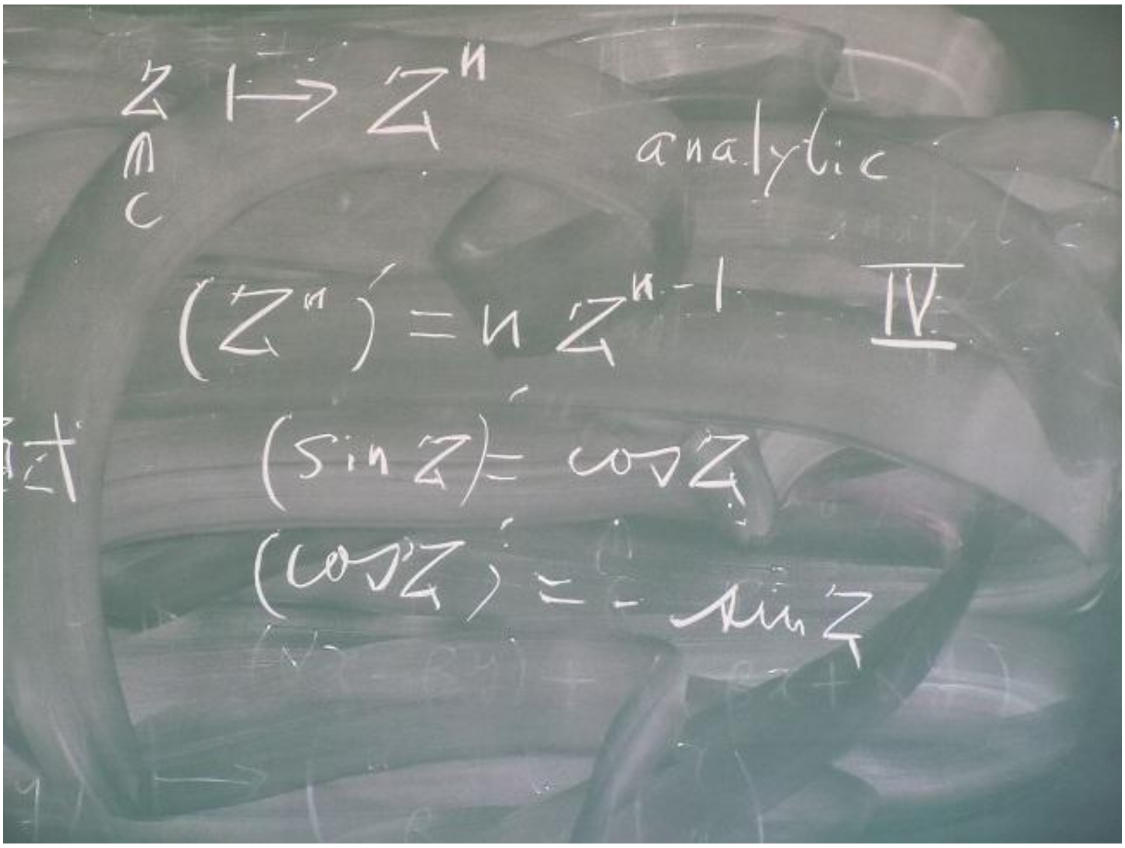
$\mathbb{C}$

$F' = 1$

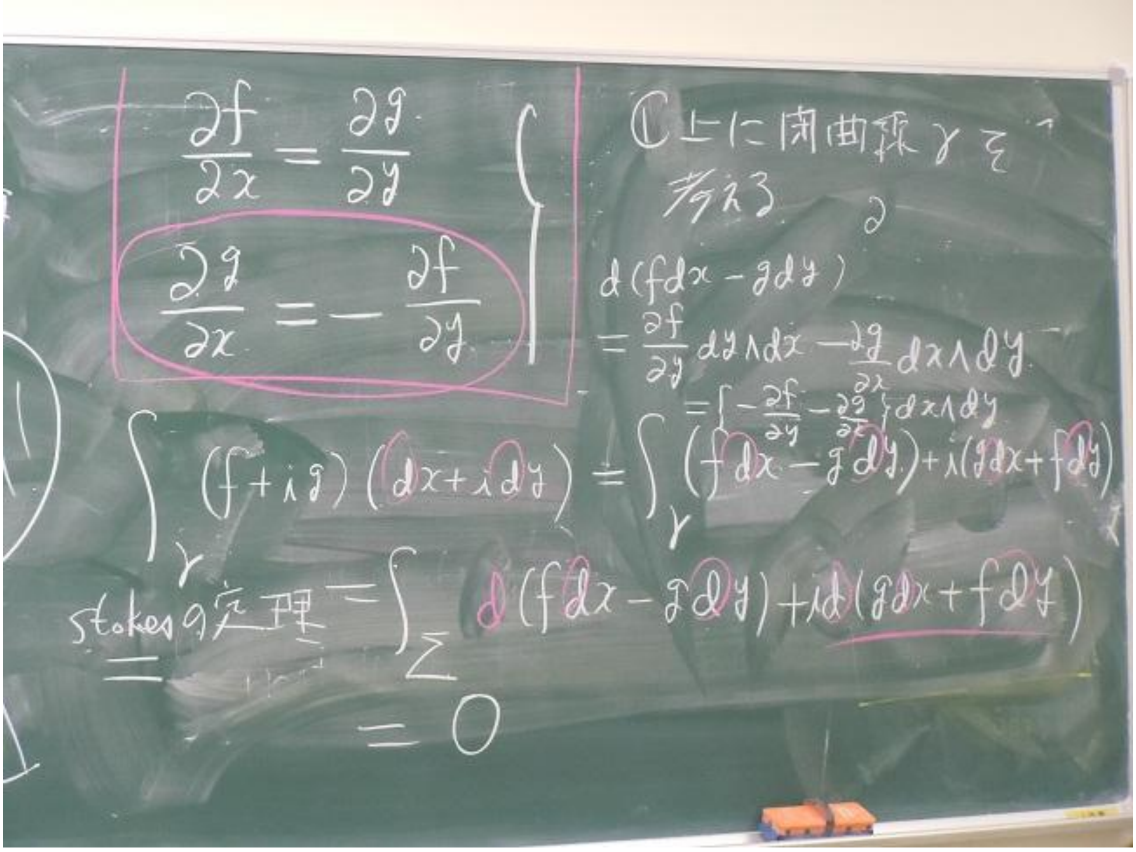
$+ib)d$

$\sin z$ = zの多項式

$\cos z$ = zの 〃


$z \mapsto z^n$
$z \in \mathbb{C}$
analytic
$(z^n)' = n z^{n-1}$
IV
式
$(\sin z)' = \cos z$
$(\cos z)' = -\sin z$


解析関数 F
$a, b : [a,b] \to \mathbb{R}$
$\gamma(t) = a(t) + i b(t)$
$F = f + ig$
$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$
曲線
$dx = x'(t)\,dt$
$dy = y'(t)\,dt$
$\int_\gamma F$
線積分
$\int_a^b F(a(t)+ib(t))(a'(t)+ib'(t))\,dt$
$= \int F(dx + i\,dy)$
Σ


$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$
$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$
$\mathbb{C}$上に閉曲線γを考える
$d(f\,dx - g\,dy)$
$= \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx - \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy$
$= \left\{ -\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right\} dx \wedge dy$
$\int_\gamma (f + ig)(dx + i\,dy) = \int_\gamma (f\,dx - g\,dy) + i(g\,dx + f\,dy)$
Stokesの定理
$= \int_\Sigma d(f\,dx - g\,dy) + i\,d(g\,dx + f\,dy)$
$= 0$

1/26(水) 3限　微積分(生物学類)

電場

$\mathbb{E}$

閉曲面 Σ で囲まれる領域 Ω

$\boxed{\int_\Sigma \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} = \int_\Omega Q\ dV}$　(Gaussの法則 積分形)

|| Gaussの発散定理　　Qは電荷密度

$\int \mathrm{div}\,\mathbb{E}\, dV$

Gaussの法則　微分形

$\mathrm{div}\,\mathbb{E} = Q$

電場は　divが電荷
rotが0

$\mathbb{E} = \mathrm{grad}\,\varphi$

$\mathrm{rot}\ \mathbb{E} = \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)$

||

0　$(\mathrm{rot}\cdot\mathrm{grad} = 0)$

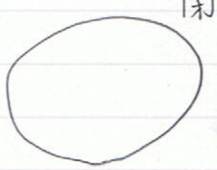
磁場

$\mathbb{B}$

磁場は　divが0
rotが電流

Ampereの法則

閉曲線 γ



閉曲線を縁とする曲面 S

線積分

$\int_\gamma \mathbb{B}\cdot d\mathbb{r} = \int_S \mathbb{J}\cdot d\mathbb{S}$

|| Stokesの定理

Ampereの法則(積分形)

各点での電荷密度 ρ

速度 $\mathbb{v}$

$\mathbb{J} = \rho\mathbb{v}$

$\int_S (\mathrm{rot}\,\mathbb{B})\cdot d\mathbb{S}$

$\mathrm{rot}\,\mathbb{B} = \mathbb{J}$　(微分形)

レポート問題I　ビオ＝サバールの発散を求めよ。(答えは0になる)

$\mathrm{div}\,\mathbb{B} = 0$

電場があると磁場が生じる、磁場があると電場が生じる $\Rightarrow$ 電磁波

多変数の微分

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad d\in D$

(x,y)

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

F' $\quad F\left((x,y)+(a,b)d\right)=F(x,y)+\underline{F'(x,y)}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}d$

$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ への線形写像

$$F'(x,y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}$ 複素数

$x+iy$ $\quad x,y$ は実数, $i^2=-1$

$F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ には掛け算がある

$$\underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{x+iy}} \longmapsto \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{(\alpha+i\beta)(x+iy)}}$$

α,β は実数

$\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ と思えば線形写像

$$= (\alpha x-\beta y)+i(\beta x+\alpha y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \boxed{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$\underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{x+iy}} \longmapsto \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{f(x+iy)+ig(x+iy)}}$$

$d \in D$, $a+bi \in \mathbb{C}$

$$F((x+iy)+(a+bi)d) = f(x+iy)+ig(x+iy) + \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{?}}\,(a+bi)d$$

さきほどの $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ での行列のヒヒ較

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}\right\} \text{Cauchy-Riemannの方程式}$$

これを満たす時に点 $x+iy$ で解析的という

すべての点で解析的な関数 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を解析関数と呼ぶ

$$F'(x,y) = \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}}^{\alpha+i\beta}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y} + i\frac{\partial g}{\partial x}$$

微分係数

命題　F, Gも解析関数 $\Rightarrow$ $F+G$: analytic (解析的), $(F+G)' = F'+G'$

証明

$$F((x+iy)+(a+ib)d) = F(x+iy) + F'(x+iy)(a+ib)d$$

$$+)\ G((x+iy)+(a+ib)d) = G(x+iy) + G'(x+iy)(a+ib)d$$

$$F(\ )+G(\ ) = F(x+iy)+G(x+iy)+\{F'(x+iy)+G'(x+iy)\}(a+ib)d$$

命題　F: analytic, $\alpha + i\beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha F$ も analytic

$$((\alpha+i\beta)F)' = (\alpha+i\beta)F'$$

↑

レポート問題II

命題　F, G: analytic $\Rightarrow FG$ も analytic, $(FG)' = F'G + FG'$

証明

$$
\begin{aligned}
& F((x+iy)+(a+ib)d) = F(x+iy) + F'(x+iy)(a+ib)d \\
\times\ & G((x+iy)+(a+ib)d) = G(x+iy) + G'(x+iy)(a+ib)d
\end{aligned}
$$

微分係数が一致

レポート問題III

命題　F, G: analytic $\Rightarrow \frac{F}{G}$: analytic, $\left(\frac{F}{G}\right)' = \frac{F'G - FG'}{G^2}$

$F: \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{C}}}{x+iy} \longmapsto \alpha + i\beta$　(定数関数)

$$F((x+iy)+(a+ib)d) = \alpha + i\beta$$
$$F(x+iy) = \alpha + i\beta$$
$$F' = 0$$

$\underset{\substack{z \\ \cap \\ \mathbb{C}}}{\underline{x+iy}} \longmapsto \underset{z}{\underline{x+iy}}$; analytic　$F((x+iy)+(a+ib)d) = (x+iy) + (a+ib)d$

$$F(x+iy) = x+iy$$
$$F' = 1$$

$\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{C}}}{z} \longmapsto z^n$: analytic　レポート問題IV

$(z^n)' = nz^{n-1}$ を計算で求めよ。

$\sin z = z$の多項式
$\cos z = z$の多項式

$(\sin z)' = \cos z$
$(\cos z)' = -\sin z$

解析関数 F

$\gamma : \underset{t}{\underset{\in}{[a,b]}} \to \mathbb{C}$ 曲線

$\int_\gamma F$ 線積分

$\gamma(t) = a(t) + i\,b(t)$ $\quad a, b : [a,b] \to \mathbb{R}$


細かく分ける

$$\int_\gamma F = \int_a^b F\left(a(t) + ib(t)\right)\left(a'(t) + ib'(t)\right)dt$$

$$= \int F(dx + i\,dy)$$

$dx = x'(t)dt$
$dy = y'(t)dt$

$\mathbb{C}$上に閉曲線γを考える

$F = f + ig$

$$\int_\gamma (f+ig)(dx+i\,dy) = \int_\gamma (f\,dx - g\,dy) + i\,(g\,dx + f\,dy)$$

$$\overset{\text{Stokesの定理}}{=} \int_\Sigma d(f\,dx - g\,dy) + i\,d(g\,dx + f\,dy)$$

$d(f\,dx - g\,dy)$
$= \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx - \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy$

$= \left\{ -\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right\} dx \wedge dy$