静磁気学

2011.1.12 Wed

静電気学
↓
クーロンの法則

1点 $\mathbb{p}$ (位置ベクトル) に置かれた電荷 e をもつ点電荷は

$$\mathbb{E}(x) = \frac{e(x-\mathbb{p})}{4\pi\varepsilon_0 \|x-\mathbb{p}\|^3}$$

空間の点 $p^{(1)}, \cdots, p^{(N)}$ にそれぞれ電荷 $e_1, \cdots, e_N$ をもった点電荷があるとする。このとき、電場は、

$$\mathbb{E}(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i(x-\mathbb{p}^i)}{4\pi\varepsilon_0 \|x-\mathbb{p}^i\|^3}$$

連続的分布

空間の各点 $\mathbb{p}$ での電荷密度が $q(\mathbb{p})$ であるとする。この場合、電場は

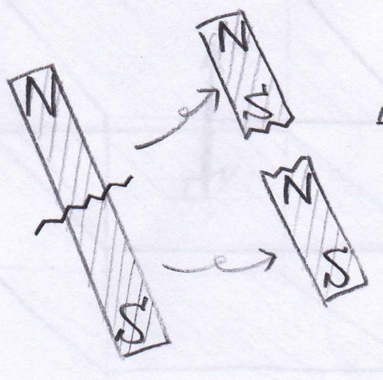
その点の近くでの
単位面積あたりの電荷の量。

$\mathbb{p} = (p_1, p_2, p_3)$

$$\mathbb{E}(x) = \int_{\mathbb{p}\neq x} \frac{q(\mathbb{p})(x-\mathbb{p})}{4\pi\varepsilon_0 \|x-\mathbb{p}\|^3} dp_1 dp_2 dp_3$$

ビオ=サバールの法則 (Biot-Savart)

$\left.\begin{array}{ll} \text{電気} & + \leftrightarrow - \\ \text{磁気} & N \leftrightarrow S \end{array}\right\}$ 全然ちがう!!



monopole

電流も磁場を生じる。

小柴 (ノーベル賞)

$\left\{\begin{array}{l} \text{重力} \\ \text{電磁場} \\ \text{弱い相互作用} \\ \text{強い相互作用} \end{array}\right.$

四つの力　統一理論
↓
~~陽子は崩壊する~~
⇓
宇宙素物理学

電荷密度 $q(x)$ （スカラー関数）

速度 $\mathbb{V}(x)$

電流 $\mathbb{j}(x) = q(x)\cdot\mathbb{V}(x)$

1点 $\mathbb{P}$ に微小の電流 $\overset{(デルタ)}{\delta}\mathbb{j}$ が流れているとする。この電流によって引き起こされる磁場 $\delta\mathbb{B}(x)$ は、

ベクトル積

$$\delta\mathbb{B}(x) = \mu_0 \frac{\delta\mathbb{j}\times(x-\mathbb{P})}{4\pi\|x-\mathbb{P}\|^3}$$ （ビオ・サバールの法則）

で与えられる。電流全体から生じる磁場は...

$$\mathbb{B}(x) = \mu_0\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbb{j}(\mathbb{P})\times(x-\mathbb{P})}{4\pi\|x-\mathbb{P}\|^3}\,dp_1\,dp_2\,dp_3$$

Cを3次元空間内の閉曲線とする

$m : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

T : 周期

$m(0) = m(T)$

$m(t+T) = m(t)$

Cの上をその向きの方向に強さIの電流が流れていたとする。

（単位長さあたりIの電流）

$\{m(t) \mid t_0 < t < t_0 + \delta t\}$ 小さな部分

$$\left\|\frac{dm}{dt}(t_0)\right\| I\,\delta t$$

$m(t_0)$ での $\mathbb{C}$ の単位~~方向~~接ベクトル

小部分から生じる磁場は（ビオサバールの法則より）

$$(\delta\mathbb{B})(x) = \mu_0\frac{\mathbb{t}\times(x-m(t_0))}{4\pi\|x-m(t_0)\|^3}\left\|\frac{dm(t_0)}{dt}(t_0)\right\| I\,\delta t$$

$$= \mu_0\frac{\frac{dm}{dt}(t_0)\times(x-m(t_0))}{4\pi(x-m(t_0)}\, I\,\delta t$$

C上の電流全体が生じる磁場は、その総和で

$$\mathbb{B}(x) = -\frac{I\mu_0}{4\pi}\int_0^T \frac{(x-m(t))\times\frac{dm}{dt}(t)}{\|x-m(t)\|^3}\,dt$$

で与えられる

〈例〉 $m(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$

$x_0 = (x_1, x_2, x_3)$

(次回目まで)

I、$B(x)$を書き下せ(積分は計算しなくてもよい)

II、原点 $(0, 0, 0)$ (積分も) $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{I\mu_0}{2} \end{pmatrix}$

(クーロンの法則 → Gaussの法則

ビオ・バザールの法則 → アンペールの法則)

Cという閉曲線;定常電流

Cとは交わらない閉曲線L, 周期S

$\vec{l}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{l}(s+S) = \vec{l}(s)$

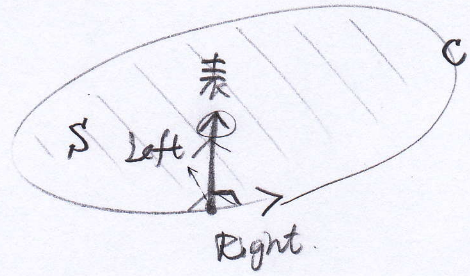
$\int_L \mathbb{B}\cdot d\vec{l}$ (線積分)

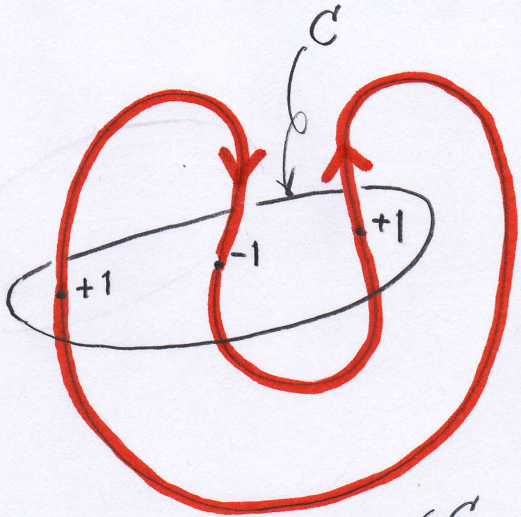
$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^S ds\int_0^T \frac{(\vec{l}(s)-\vec{m}(t))\times\frac{d\vec{m}}{dt}(t)\cdot\frac{d\vec{l}}{ds}(s)}{\|\vec{l}(s)-\vec{m}(t)\|^3}\,dt$$

$= Lk(C, L)$

linking (絡み数)

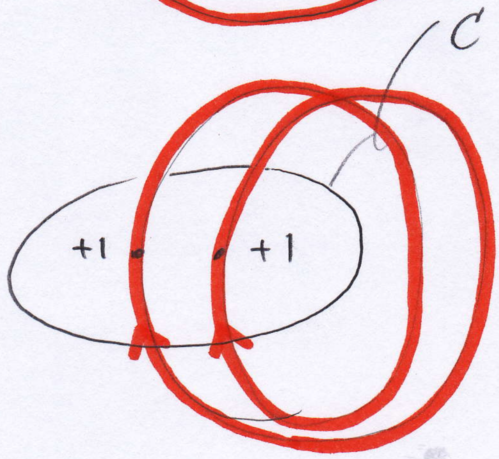
Cを境界にもつ曲面Sを考える.



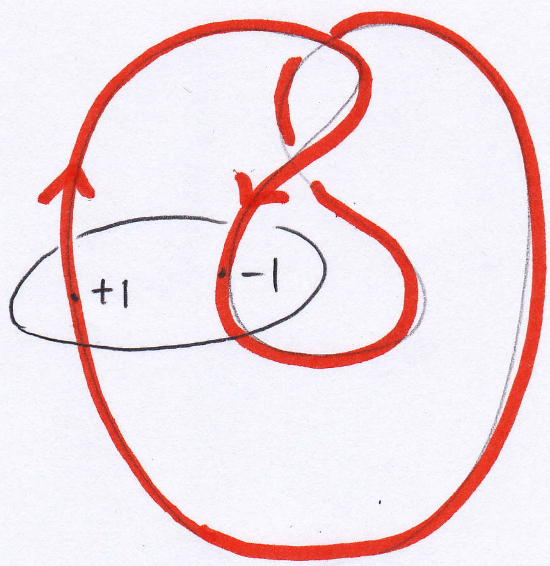


Sと3点で交わる

$$Lk(C, L) = (+1)+(-1)+(+1)$$
$$= \underline{+1}$$



$$Lk(C, L) = \underline{+2}$$



$$Lk(C, L) = \underline{0}$$

静磁気学
静電気学

クーロンの法則

1点 $\mathbb{p}$(位置ベクトル)に
置かれた電荷 e を持つ
点電荷は

$$\mathbb{E}(\mathbb{x}) = \frac{e(\mathbb{x}-\mathbb{p})}{4\pi\varepsilon_0\|\mathbb{x}-\mathbb{p}\|^3}$$

空間の点 $\mathbb{p}^{(1)},\dots,\mathbb{p}^{(N)}$ に
それぞれ電荷 $e_1,\dots,e_N$ を
持った点電荷があるとする
この時これらが作る電場は

$$\mathbb{E}(\mathbb{x}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i(\mathbb{x}-\mathbb{p}^{(i)})}{4\pi\varepsilon_0\|\mathbb{x}-\mathbb{p}^{(i)}\|^3}$$

Nはいくら大きくてもいい。

$\mathbb{p}=(p_1, p_2, p_3)$

空間の点 $\mathbb{p}^{(1)},\dots,\mathbb{p}^{(N)}$ に
それぞれ電荷 $e_1,\dots,e_N$ を
持った点電荷があるとする
この時これらが作る電場は

$$\mathbb{E}(\mathbb{x}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i(\mathbb{x}-\mathbb{p}^{(i)})}{4\pi\varepsilon_0\|\mathbb{x}-\mathbb{p}^{(i)}\|^3}$$

Nはいくら大きくてもいい。

$\mathbb{p}=(p_1, p_2, p_3)$

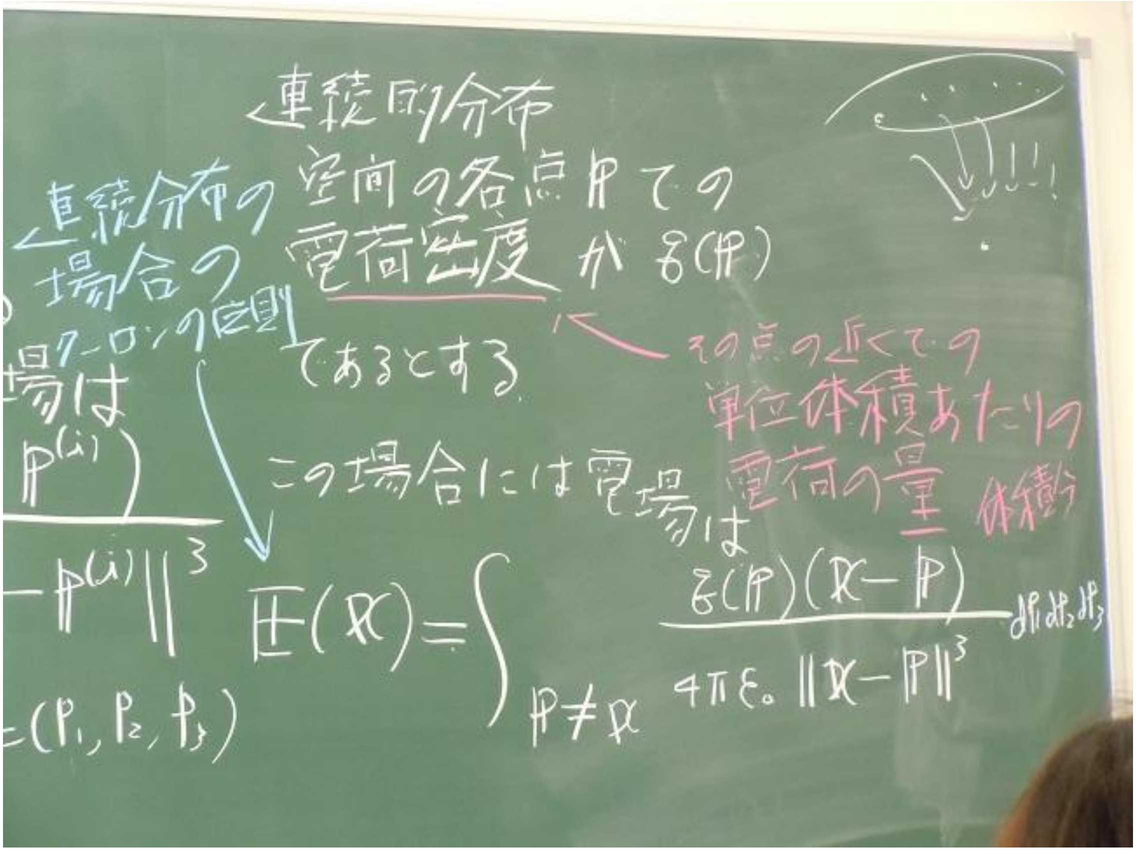
連続分布の場合のクーロンの法則

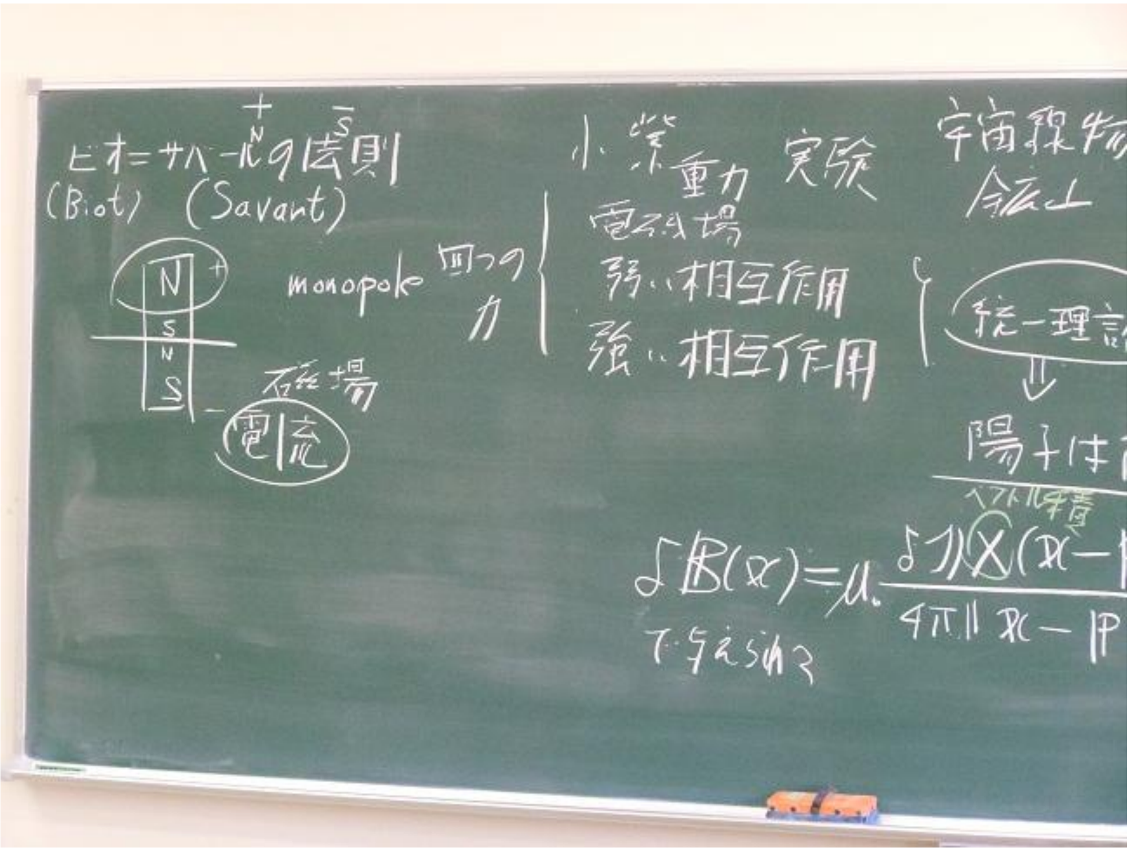
連続的分布
空間の各点 $\mathbb{p}$ での
電荷密度が $\rho(\mathbb{p})$
であるとする

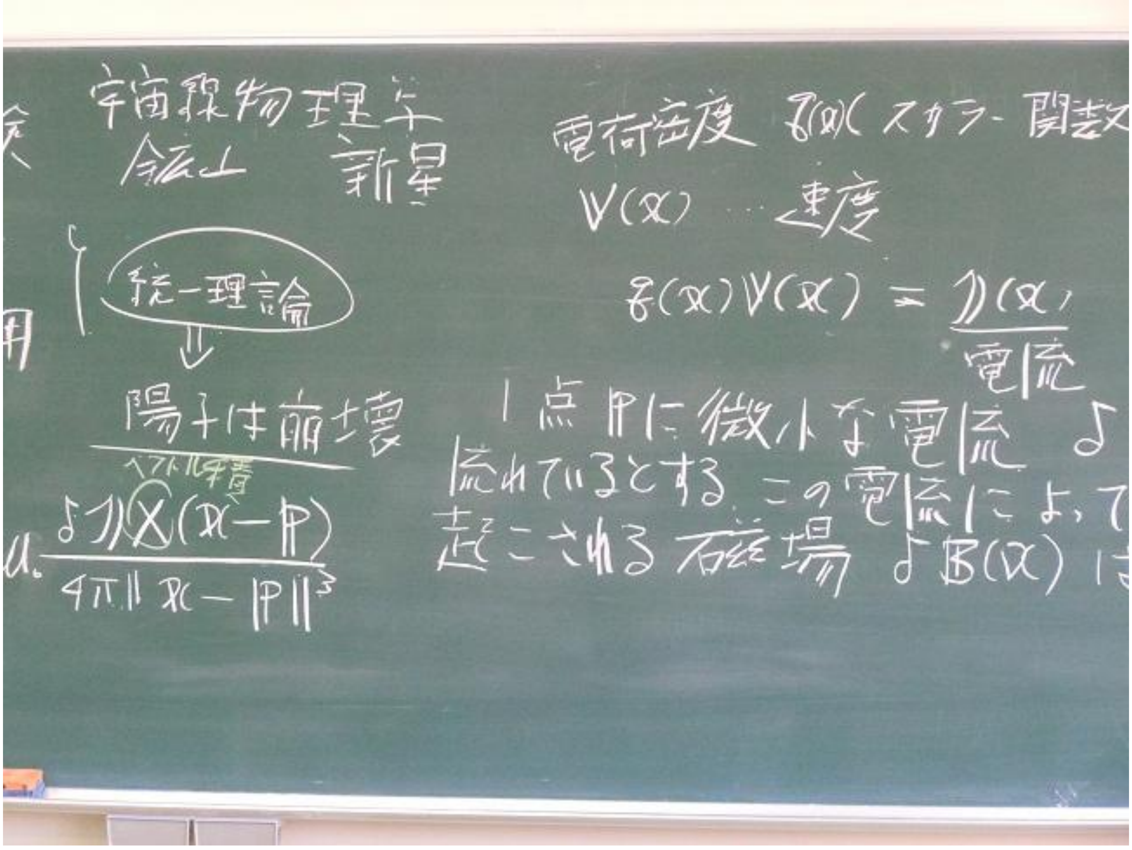
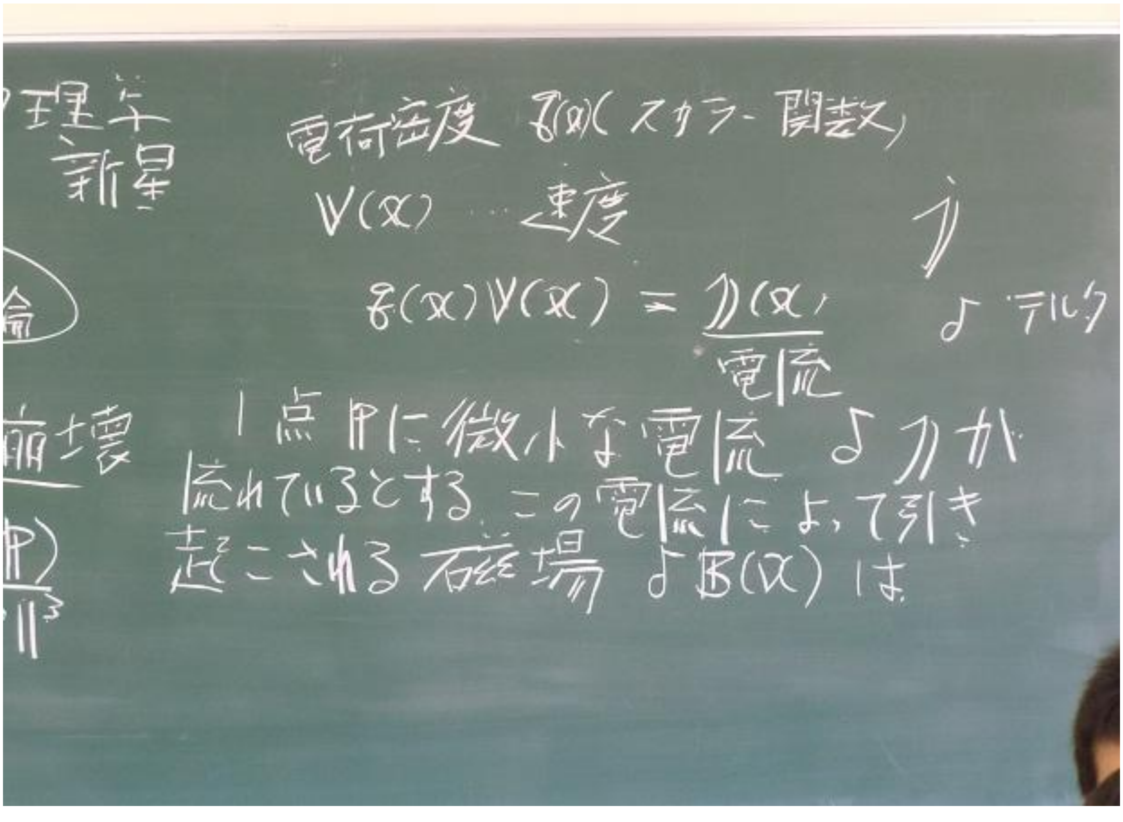
その点の近くで
単位体積
電荷の量

この場合には電場は

$$\mathbb{E}(\mathbb{x}) = \int_{\mathbb{p}\neq\mathbb{x}} \frac{\rho(\mathbb{p})(\mathbb{x}-}{4\pi\varepsilon_0\|\mathbb{x}-}$$


連続的分布
連続分布の場合の
空間の各点 P での
電荷密度 が ρ(P)
であるとする
クーロンの法則
その点の近くでの
単位体積あたりの
電荷の量
この場合には電場は
E(x) = ∫_{P≠x} ρ(P)(x − P) / 4πε₀‖x − P‖³ dp₁dp₂dp₃


ビオ＝サバールの法則
(Biot) (Savant)
N
S
monopole
四つの力
磁場
電流
小柴
重力
実験
電磁場
弱い相互作用
強い相互作用
ベクトル積
で与えられる


宇宙線物理学
新星
統一理論
⇓
陽子は崩壊
ベクトル積
$\mu_0 \dfrac{\delta \mathbb{J} \times (x - \mathbb{P})}{4\pi \|x - \mathbb{P}\|^3}$
電荷密度 $\rho(x)$（スカラー関数
$\mathbb{V}(x)$ … 速度
$\rho(x)\mathbb{V}(x) = \mathbb{J}(x)$
電流
1点 $\mathbb{P}$ に微小な電流 δ
流れているとする この電流によって
起こされる磁場 $\delta\mathbb{B}(x)$ は

電荷密度 $\rho(x)$（スカラー関数）
$\mathbb{V}(x)$ … 速度
$\rho(x)\mathbb{V}(x) = \mathbb{J}(x)$
電流
δ デルタ
1点 $\mathbb{P}$ に微小な電流 $\delta\mathbb{J}$ が
流れているとする この電流によって引き
起こされる磁場 $\delta\mathbb{B}(x)$ は

電流全体から生じる磁場は

$$\mathbb{B}(x) = \mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbb{J}(p) \times (x - p)}{4\pi \| x - p \|^3} \, dp_1 dp_2 dp_3$$

Cを3次元空間内の閉曲線

$$\vec{m} : \overset{[0,T]}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^3 \qquad \vec{m}(0) = \vec{m}(T)$$

T 周期

$$\vec{m}(t+T) = \vec{m}(t)$$

$p)$ $dp_1 dp_2 dp_3$
3
線
$\vec{m}(T)$

Cの上をその向きの方向に
強さIの電流が流れているとする
(単位長さあたりIの電流)

$$\{ \vec{m}(t) \mid t_0 < t < t_0 + \delta t \}$$

$$\left\| \frac{d\vec{m}}{dt}(t_0) \right\| I \, \delta t$$

…Iを その向きの方向に

…さIの電流が流れているとする

…位長さあたりIの電流)

$\ldots t) \mid t_0 < t < t_0 + \delta t \}$ 小さな部分

$\frac{d\vec{m}}{dt}(t_0) \parallel I\,\delta t$

小部分から生じる磁場は　$\vec{m}(t_0)$でのCの…

$$(\delta \mathbb{B})(\mathbb{x}) = \mu_0 \frac{\boxed{t} \times (\mathbb{x} - \vec{m}(t_0))}{4\pi \| \mathbb{x} - \vec{m}(t_0) \|^3} \quad \parallel \frac{d\vec{m}}{dt} \ldots$$

$$= \mu_0 \frac{\frac{d\vec{m}}{dt}(t_0) \times (\mathbb{x} - \vec{m}(t_0))}{4\pi \| \mathbb{x} - \vec{m}(t_0) \|^3} I\,\delta t$$

$\mathbb{B}$…

…のCの単位接ベクトル

$$\cdots \left\| \frac{d\vec{m}}{dt}(t_0) \right\| I\,\delta t$$

C上の電流全体が生…

$I\,\delta t$

その総和で

$$B(x) = -\frac{I\mu_0}{4\pi}\int_0^T \frac{(x-\vec{m}(t))\ \cdots}{\|x-\vec{m}(\cdots}$$

…クトル

$I\,\delta t$

…上の電流全体が生じる磁場は

…の総和で

$$\cdots\frac{I\mu_0}{4\pi}\int_0^T \frac{(x-\vec{m}(t)) \times \frac{d\vec{m}}{dt}(t)}{\|x-\vec{m}(t)\|^3}\,dt$$

例

$\vec{m}(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

I　$B(x)$を書き下せ
積分は残して……

II　原点 $x=(0, 0, 0)$
$\left(0, 0, \frac{I\mu_0}{2r}\right)$

Cとっ閉曲
定常電
Cとは交わらな
$\vec{\ell}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$\vec{\ell}(s+S)=$

$t, 0)$

Cとっ閉曲線
定常電流

クーロンの法則 ⇒ Gauss
ビオ=サバールの法則 ⇒

Cとは交わらない閉曲線 ℓ
周期 S

$\vec{\ell}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

$\vec{\ell}(s+S)=\vec{\ell}(s)$

$\int_{\ell} B\cdot d\vec{\ell}$ (

クーロンの法則 ⇒ Gaussの法則

ビオ＝サバールの法則 ⇒ アンペールの法則

閉曲線 L $\quad \displaystyle\int_L \mathbb{B}\cdot d\vec{l}$ （線積分）

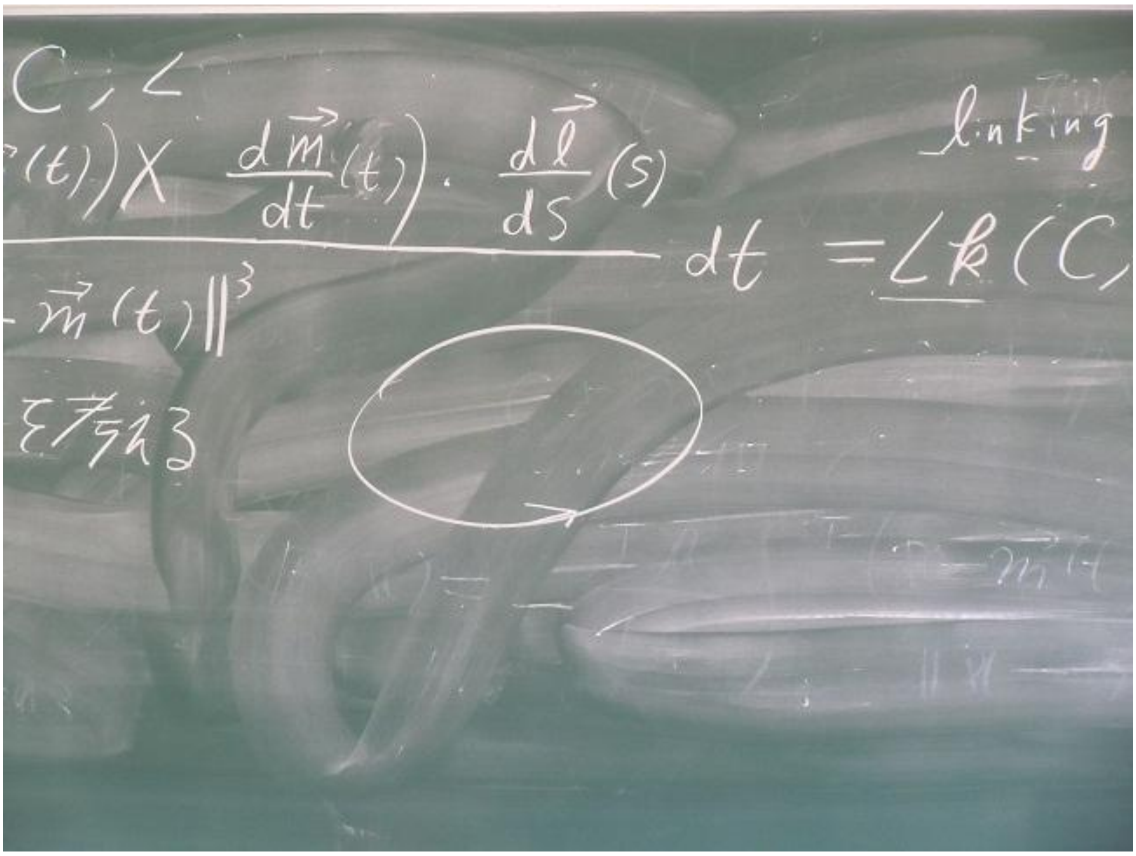
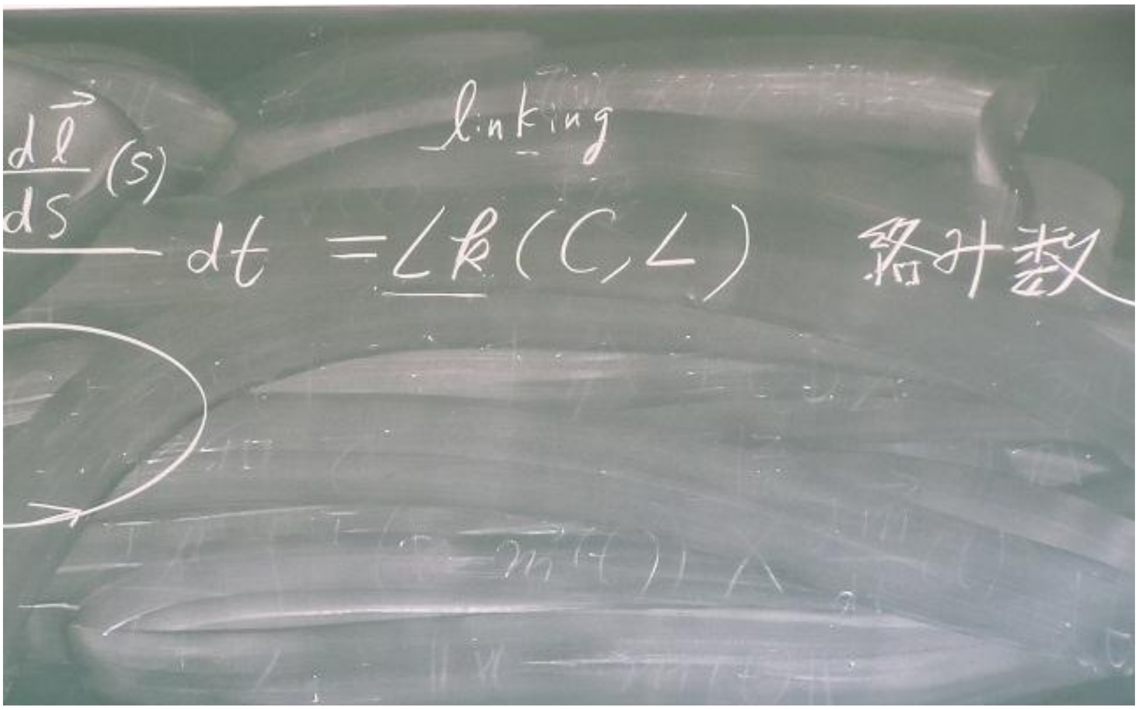
周期 S

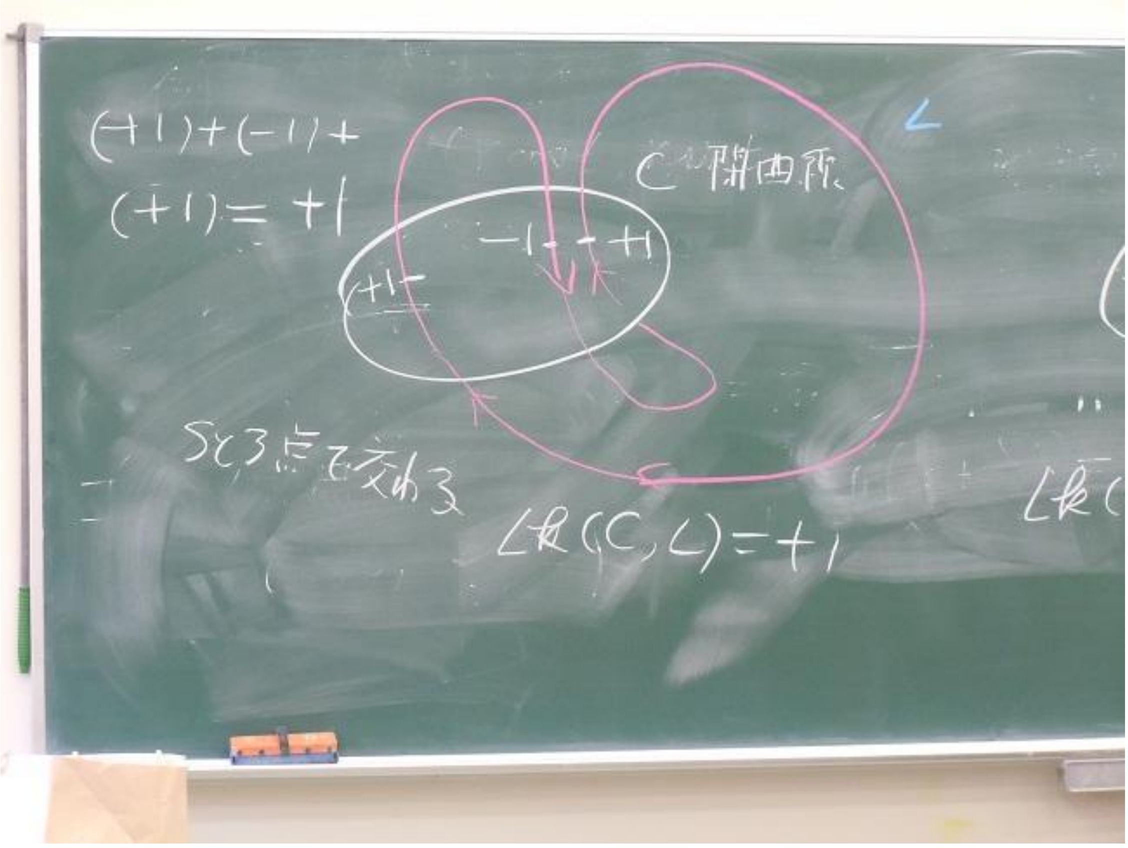
C ; L

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^S ds \int_0^T \frac{\left(\vec{l}(s)-\vec{m}(t)\right)\times \frac{d\vec{m}}{dt}(t)}{\|\vec{l}(s)-\vec{m}(t)\|^3}$$

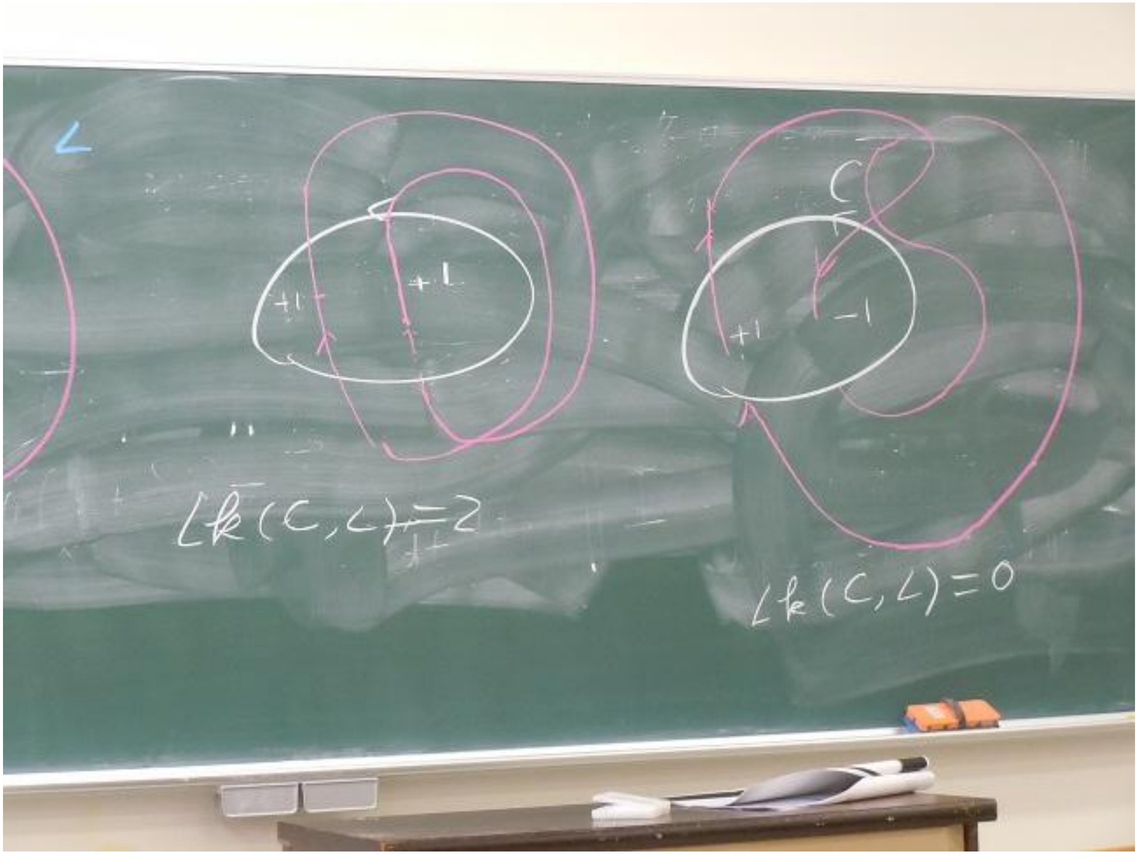
Cを境界に持つ 曲面Sを考える

向き


C, L
linking
(t))× dm/dt(t))· dl/ds(s)
dt = Lk(C,
m(t)‖³
を考える

linking
dl/ds(s)
dt = Lk(C,L) 絡み数



(+1)+(−1)+
(+1)= +1
C の隣西所
−1 − +1
+1
Sと3点で交わる
lk(C, L)=+1



+1
+1
lk(C, L)=2
C
+1
−1
lk(C, L)=0