$$
\begin{cases}
\text{ベクトル解析} & \text{ベクトル場} \xrightarrow{\mathrm{rot}} \text{ベクトル場} \xrightarrow{\mathrm{div}} \text{スカラー場} \\
& \updownarrow \qquad\qquad\qquad \updownarrow \qquad\qquad\qquad \updownarrow \\
\text{微分形式} & \text{1次の微分形式} \xrightarrow{d} \text{2次の微分形式} \xrightarrow{d} \text{3次の微分形式}
\end{cases}
$$

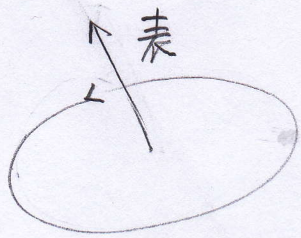
向きづけ (orientation)

面 → 裏表

曲面

↳ 閉曲面 → 外向き = 表

閉曲面を縁とする曲面



誘導される

反時計回り

div.

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

単位時間, 単位体積あたり…

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{f} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

> 0 わき出す

< 0 流れ出す

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla \varphi$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{f}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{f} = \nabla \cdot \boldsymbol{f}$$

内積

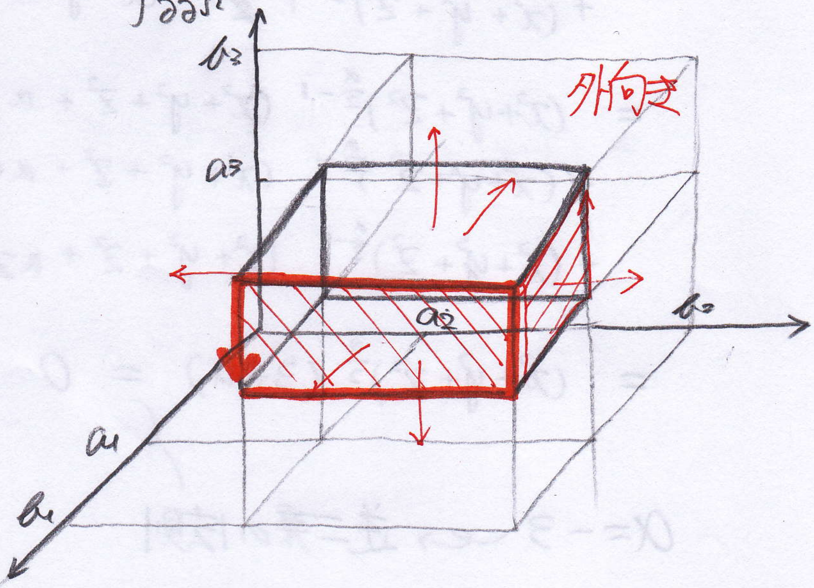
$(\mathrm{div}\cdot\mathrm{rot} = 0 \qquad d\cdot d = 0)$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbb{f}) = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbb{f}) = \underbrace{|\nabla\ \ \nabla\ \ \mathbb{f}|}_{\text{行列式}} = 0$$

領域Ω: $[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times[a_3, b_3] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

ω: 1次の微分形式

$$\int_{\Omega} dd\omega = \int_{\partial\Omega} d\omega = \int_{\partial\partial\Omega} \omega$$



静電気学

クーロンの法則

q_1 ———— q_2

r

キョリ

2つの電荷にはたらく力 : $k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$ 　逆二乗の法則

原点

q ——→ $\mathbb{r}$ 位置ベクトル 　$|\mathbb{r}| = r$ 　$\mathbb{r} = (x, y, z)$

$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$

電場

$\hookrightarrow kq\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\mathbb{r}}{r} = kq\dfrac{\mathbb{r}}{r^3}$

$\mathrm{div}(r^{\alpha}\cdot \mathbb{r})$ （α：実数）

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}\cdot x + \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}\cdot y + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}\cdot z$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\alpha}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}x^2 + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\alpha}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}y^2 + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\alpha}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}z^2$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}(x^2+y^2+z^2+\alpha x^2) + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}(x^2+y^2+z^2+\alpha y^2) + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}(x^2+y^2+z^2+\alpha z^2)$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}(3+\alpha) = 0$$

$\alpha = -3 \Leftrightarrow$ 逆二乗の法則

Gaussの発散定理

$\mathbb{f}$（あるベクトル場） Ω（ある領域）

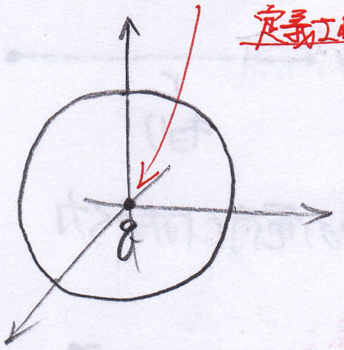
$$\underbrace{\int_{\partial\Omega}}_{\text{閉曲面}} \mathbb{f} = \int_{\Omega} \underbrace{\mathrm{div}\,\mathbb{f}}_{=0} = 0$$

閉曲面でかこまれた領域では

定義されていないと成立しない!!

原点では電場は

定義されていない



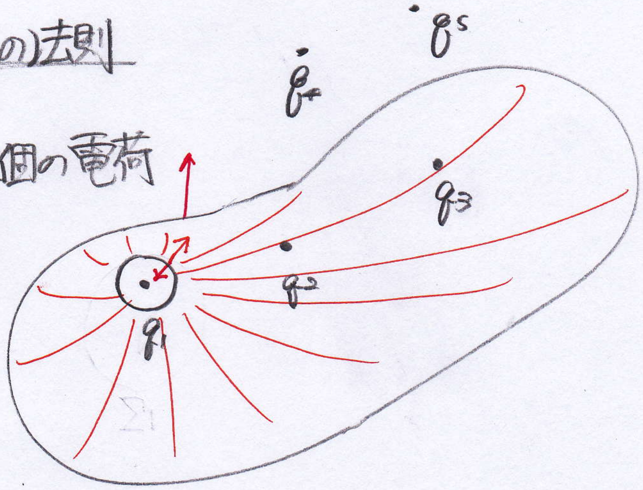
$\left\{\begin{array}{l}\text{原点中心} \\ \text{半径}a\end{array}\right.$ 球面

$$4\pi a^2 \times \frac{kq}{a^2} = 4\pi kq$$

→ Gaussの発散定理が成立するためには問題の閉曲面で囲まれたすべての領域でベクトル場が定義されている必要がある

Gaussの法則

有限個の電荷



Σ : 閉曲面

$\mathbb{E}$: 電場

Σ_1 : q_1を中心とした球

$$\int_\Sigma \mathbb{E} = 4\pi k(q_1 + q_2 + q_3)$$

(面積分)

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4 + \mathbb{E}_5$$

それぞれ電荷1〜5があったときの電荷

$$\int_\Sigma \mathbb{E} = \int_\Sigma \mathbb{E}_1 + \cdots + \int_\Sigma \mathbb{E}_5$$

$$\int_\Sigma \mathbb{E}_4 = \int_\Sigma \mathbb{E}_5 = 0$$

$\Sigma \cup \Sigma_1$

$$\int_{\Sigma \cup \Sigma_1} \mathbb{E}_1 = 0$$

$$\int_\Sigma \mathbb{E}_1 - \int_{\Sigma_1} \mathbb{E}_1 = 0$$

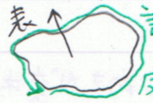
$$\int_\Sigma \mathbb{E}_1 = \int_{\Sigma_1} \mathbb{E}_1 = 4\pi k q_1$$

12/15(水) 3限 微積分(生物学類)

閉曲線を縁とする曲面

$\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$

ベクトル解析



微分形式

ベクトル場 $\xrightarrow{\mathrm{rot}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\mathrm{div}}$ スカラー場

$\updownarrow$ 　 $\updownarrow\ f = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$ 　 $\updownarrow\ \mathrm{div}\, f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$

↳単位時間に単位体積あたりにわき出す量

1次の微分形式 $\xrightarrow{d}$ 2次の微分形式 $\xrightarrow{d}$ 3次の微分形式

向きづけ(orientation)

面:表 or 裏 ⟵ 閉曲面の場合 外向きを表にするのが一般的

曲線:方向(始点、終点)

∇ ナブラ(ベクトルのようなもの)

$\mathrm{grad}\, \varphi = \nabla \varphi$

$\mathrm{rot}\, f = \nabla \times f$

$\mathrm{div}\, f = \nabla \cdot f$

内積

$\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$

$d \circ d = 0$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot} \cdot f) = \nabla \cdot (\nabla \times f) = \overbrace{\begin{vmatrix} \nabla & \nabla & f \end{vmatrix}}^{\text{行列式}}$$

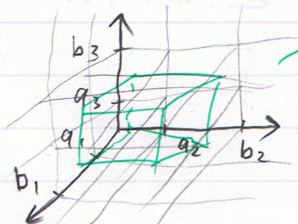
同じ列があれば行列式は0

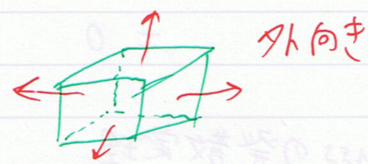
領域 $\Omega : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}^3$

ω:1次の微分形式

$$\int_\Omega dd\omega = \int_{\partial\Omega} d\omega$$

$$= \int_{\partial\partial\Omega} \omega = 0$$

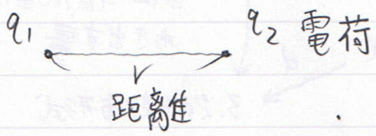




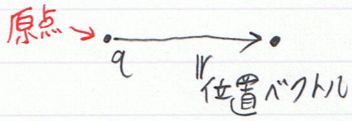
この立方体を細かく分割して
それぞれの面に対する流れの
作用を考えると、内部では
打ち消し合う
残るのは外側の面の作用

静電気学

クーロンの法則



$k \dfrac{q_1 q_2}{r^2}$　電荷の正負によって力の向きが変わる



単位電荷を置いた時に電荷に力がかかる：電場

$$k q \frac{1}{r^2} \frac{\mathbb{r}}{r} \qquad |\mathbb{r}| = r$$

$\frac{1}{r^2}$ ← 逆2乗の法則

$$\mathbb{r} = (x, y, z)$$
$$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$r^\alpha \mathbb{r} = \left(x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}},\ y(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}},\ z(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(r^\alpha \mathbb{r}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)(r^\alpha \mathbb{r}) \\
&= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\alpha}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha-2}{2}} \cdot 2x \cdot x \\
&\quad + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\alpha}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha-2}{2}} \cdot 2y \cdot y \\
&\quad + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\alpha}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha-2}{2}} \cdot 2z \cdot z \\
&= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}} \left\{ 3 + \alpha (x^2+y^2+z^2)^{-1} (x^2+y^2+z^2) \right\} \\
&= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}} (3 + \alpha)
\end{aligned}$$

↑ 逆2乗の時は r^{-3} なので $\alpha = -3$

$$= 0$$

Gaussの発散定理

Ω：領域

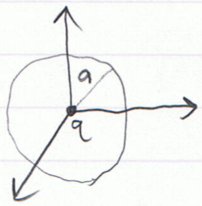
$$\int_{\partial\Omega} \mathbb{f} = \int_{\Omega} \mathrm{div}\, \mathbb{f}$$

$\partial\Omega$：閉曲面

クーロンの法則が成り立つ電場で考えると $\mathrm{div}\, \mathbb{f} = 0$ なので $\int_{\Omega} \mathrm{div}\, \mathbb{f} = 0$

本当にそうなのか？

原点中心
半径 a } 球面



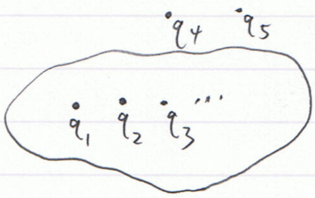
球面上の電荷について
距離はどこでも a なので、力は同じ、向きだけ違う

球面の表面積は $4\pi a^2$

$$4\pi a^2 \times \frac{kq}{a^2} = 4\pi kq$$ ← 0にならない

Gaussの発散定理を適用するには、閉曲面で囲まれた領域の内部の全ての点において力が定義されていないといけない
しかし原点の点 q での電場は定義されていないので適用不可

Gaussの法則



閉曲面Σ　有限個の電荷が存在
f：電場

$\int_\Sigma f$　面積分

$$= 4\pi k(\underbrace{q_1+q_2+q_3}_{\text{閉曲面の内部にある電荷の合計}})$$

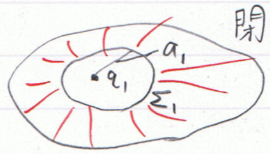
f：全部合わせた電場
f_1：q_1 しかない時の電場
f_2：q_2 〃
f_3：q_3 〃
⋮

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots$$
$$\int_\Sigma f = \int_\Sigma f_1 + \int_\Sigma f_2 + \int_\Sigma f_3 + \cdots$$

$\int_\Sigma f_4 = \int_\Sigma f_5 = 0$ ←閉曲面の外にある電荷が作る電場は内部の電場が定義されるのでGaussの発散定理が使える

NO.

DATE



Σ_1：q_1を中心にして半径a_1の球面

↑

十分小さい

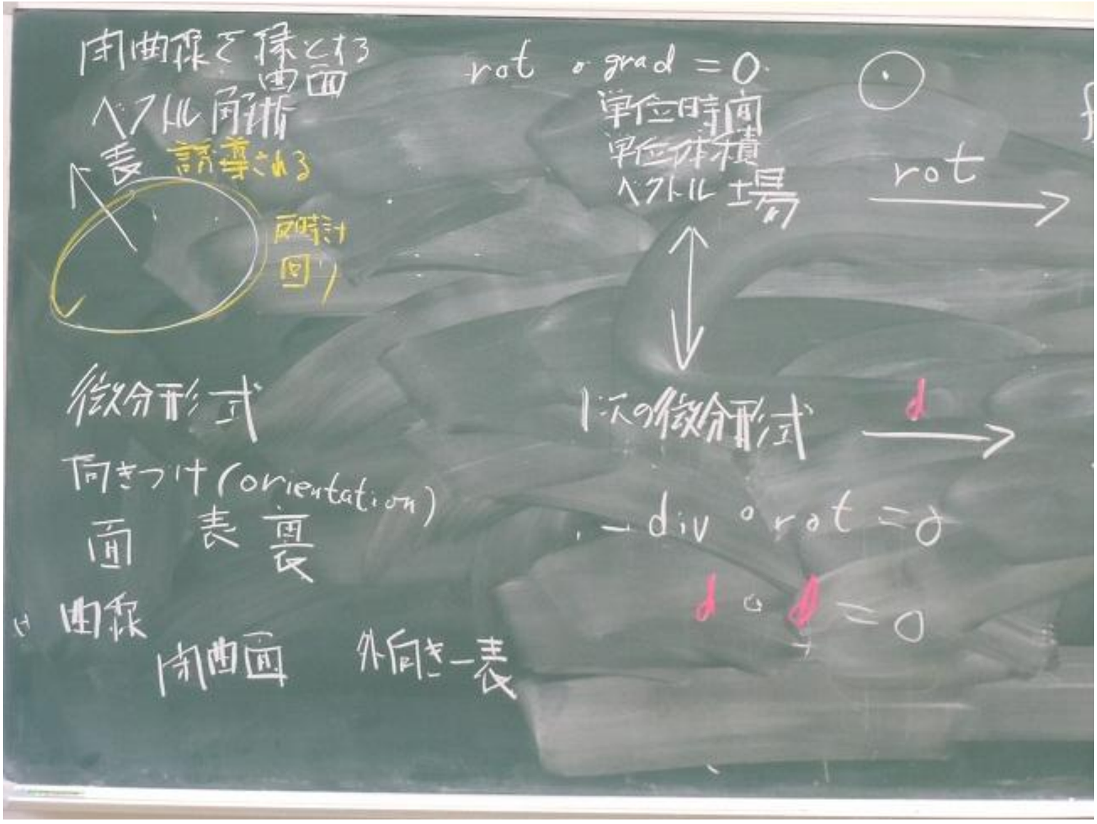
$$\int_{\Sigma \cup \Sigma_1} f_1 = 0$$

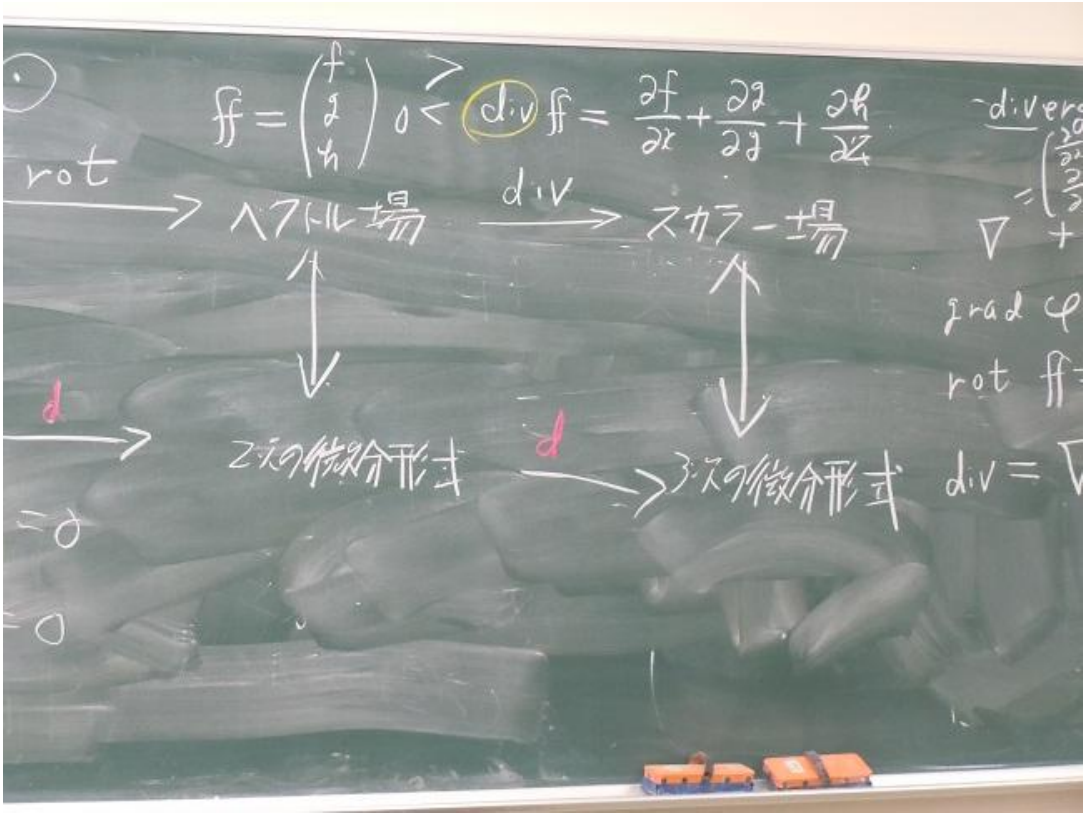
$$\shortparallel$$

$$\int_{\Sigma} f_1 - \int_{\Sigma_1} f_1$$

$$\int_{\Sigma} f_1 = \int_{\Sigma_1} f_1$$

$$= 4\pi k q_1$$


閉曲線を縁とする曲面
ベクトル解析
表 誘導される
反時計回り
微分形式
向きづけ (orientation)
面 表 裏
曲線
閉曲面 外向き—表
rot ∘ grad = 0
単位時間
単位体積
ベクトル場
rot
1次の微分形式
d
div ∘ rot = 0
d ∘ d = 0


f = (f, g, h)
div f = ∂f/∂x + ∂g/∂y + ∂h/∂z
divergence
rot
ベクトル場
div
スカラー場
d
2次の微分形式
d
3次の微分形式
grad φ
rot f
div =

$\mathbf{f} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$ — divergence（発散）

$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

∇ ナブラ（ベクトルのようなもの）

V → スカラー場

↕

→ 3次の微分形式

$\mathrm{grad}\, \varphi = \nabla \varphi$

$\mathrm{rot}\, \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f}$

$\mathrm{div} = \nabla \odot \mathbf{f}$

↑ 内積

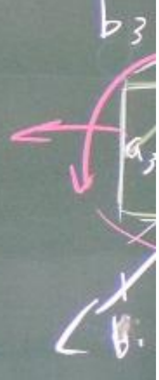
$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \mathbf{f}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = | \nabla$

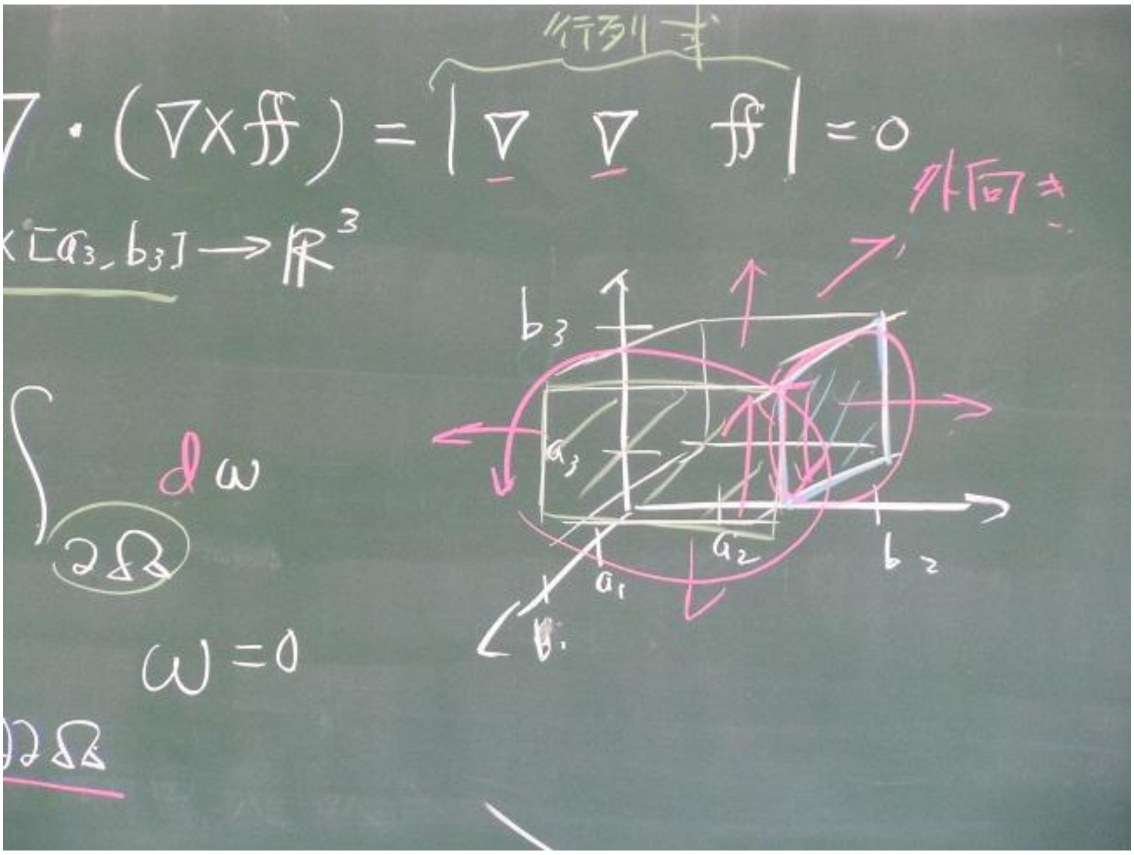
領域 Ω: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

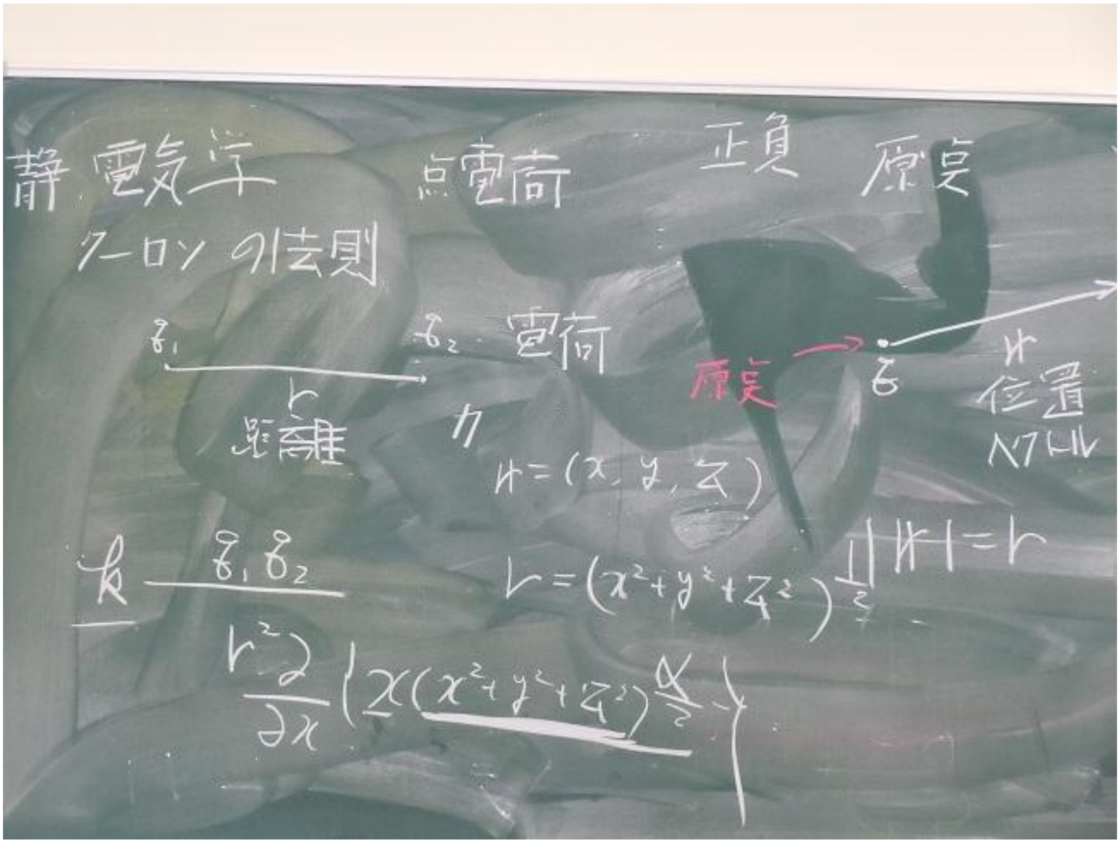
ω 1次の微分形式

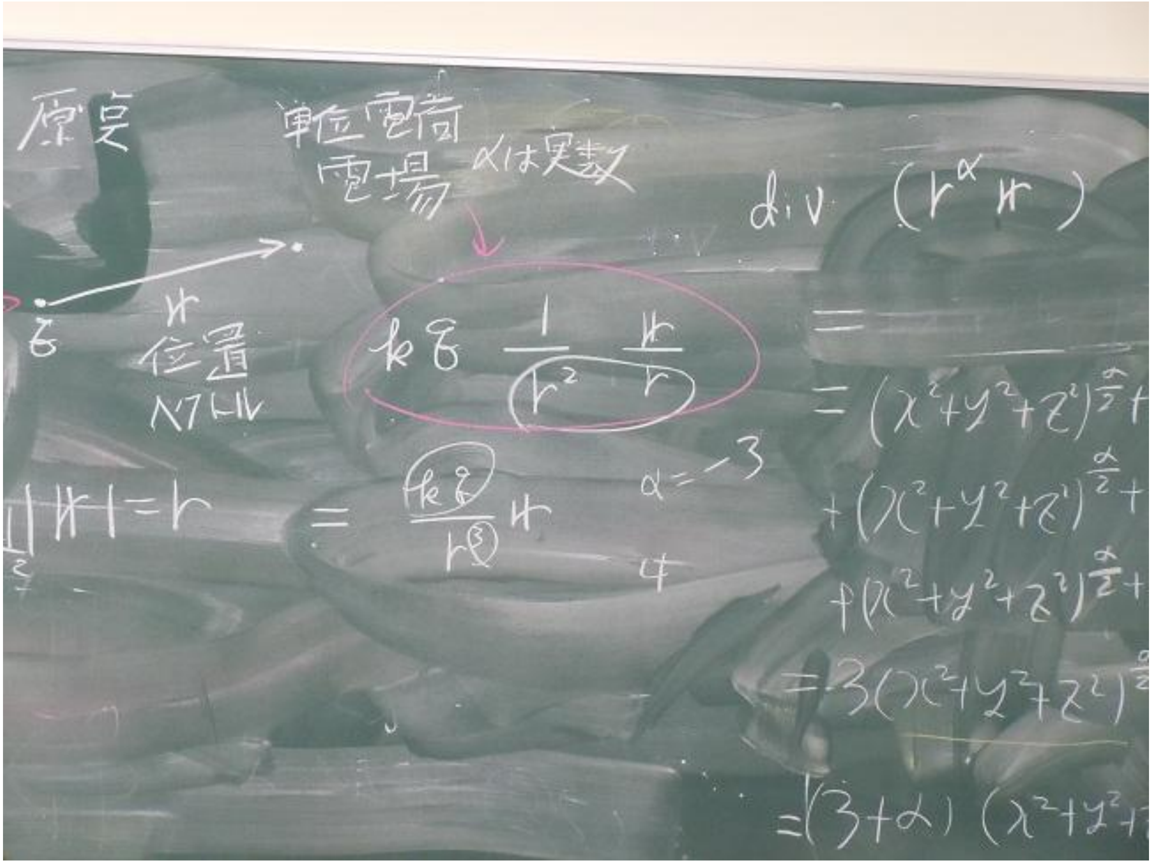
$$\int_{\Omega} dd\omega = \int_{\partial\Omega} d\omega$$

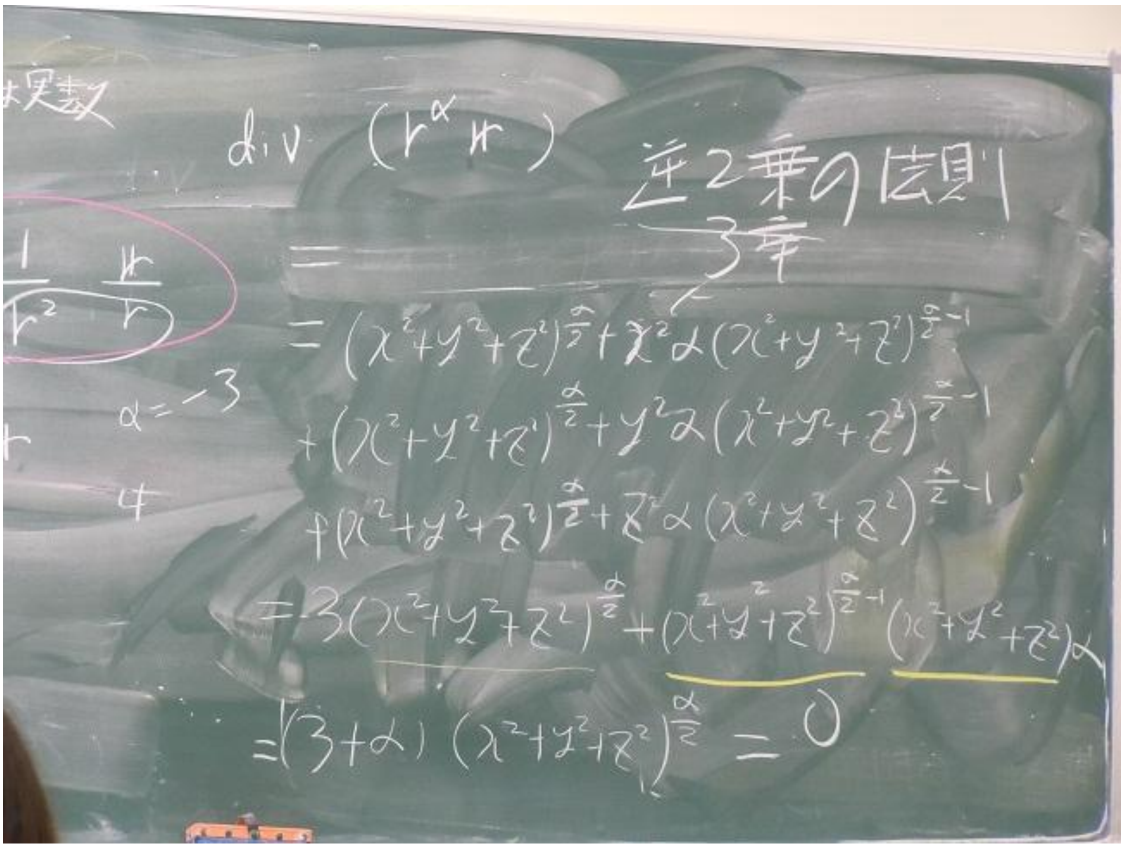
$$= \int_{\partial\partial\Omega} \omega = 0$$



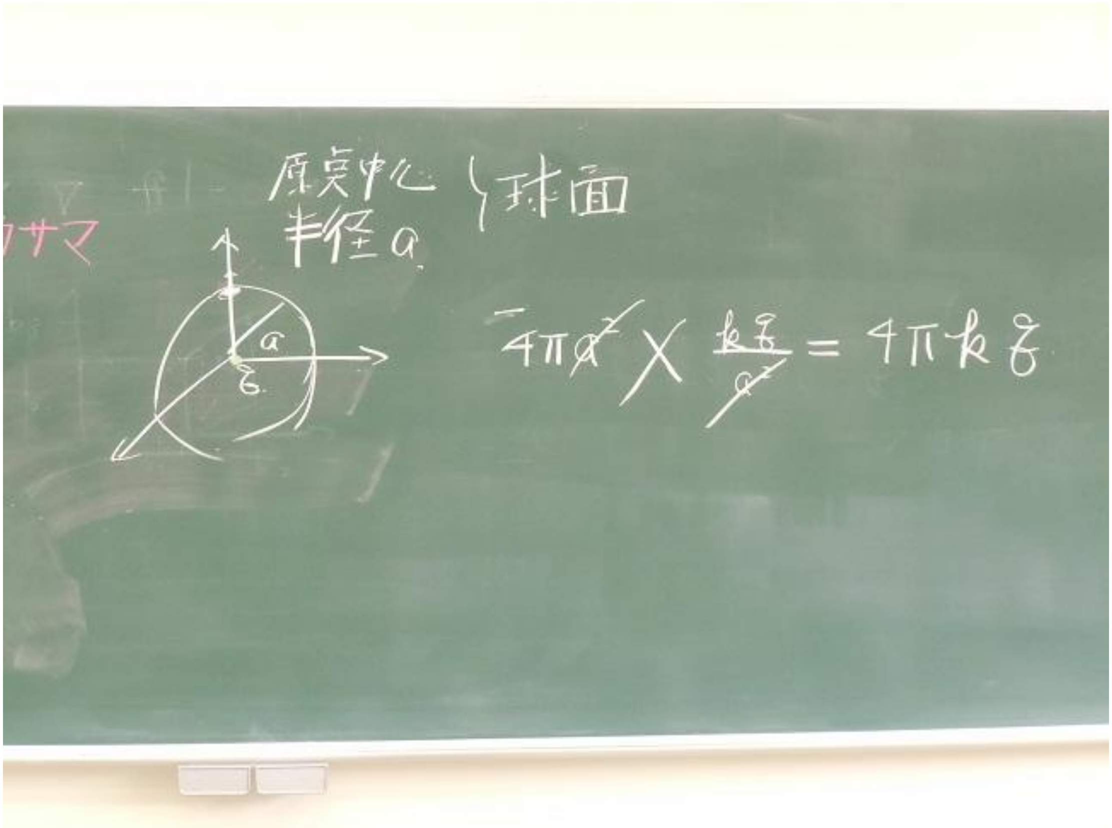

行列式
∇·(∇×f) = |∇ ∇ f| = 0
外向き
×[a3, b3] → R3
b3
a3
a1
b1
a2
b2
∫∂Ω dω
ω=0
∂Ω

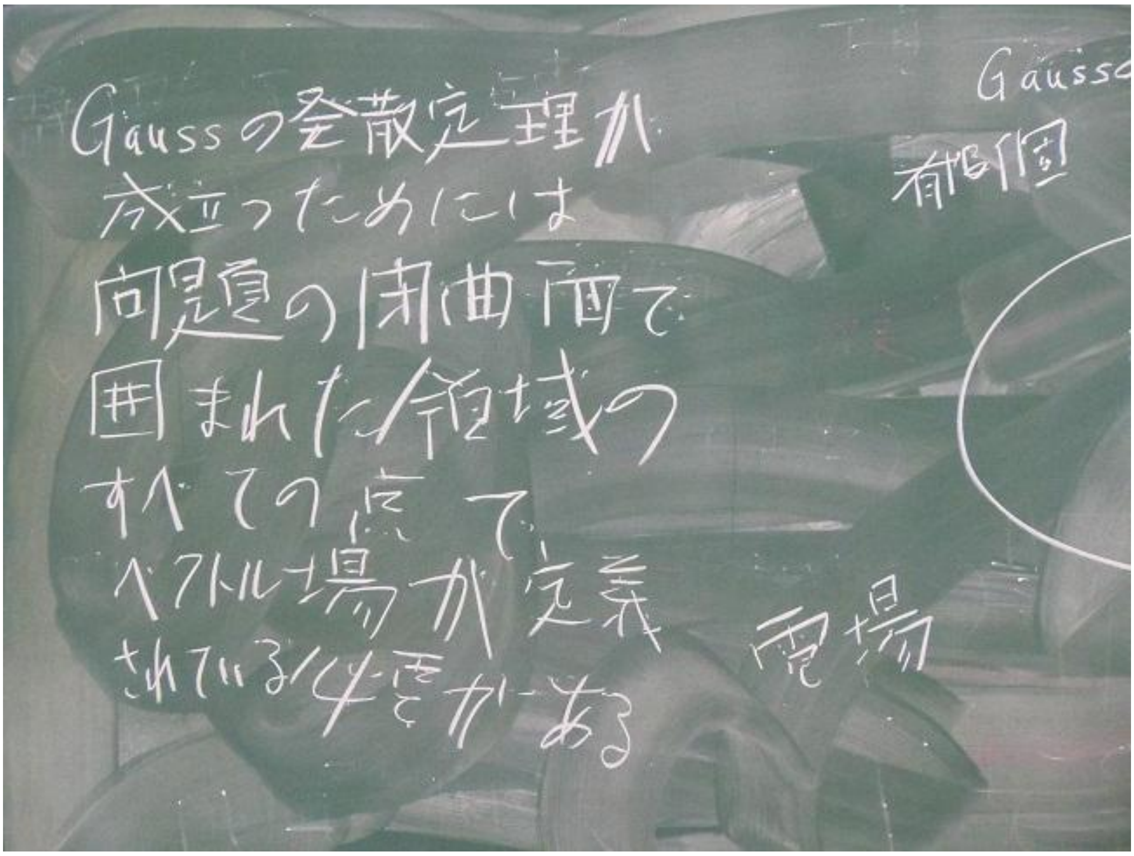

静電気学
点電荷
正負
原点
クーロンの法則
q1
q2 電荷
r
距離
原点
q
r
位置ベクトル
r=(x, y, z)
||r||=r
k q1q2
r=(x2+y2+z2)1/2

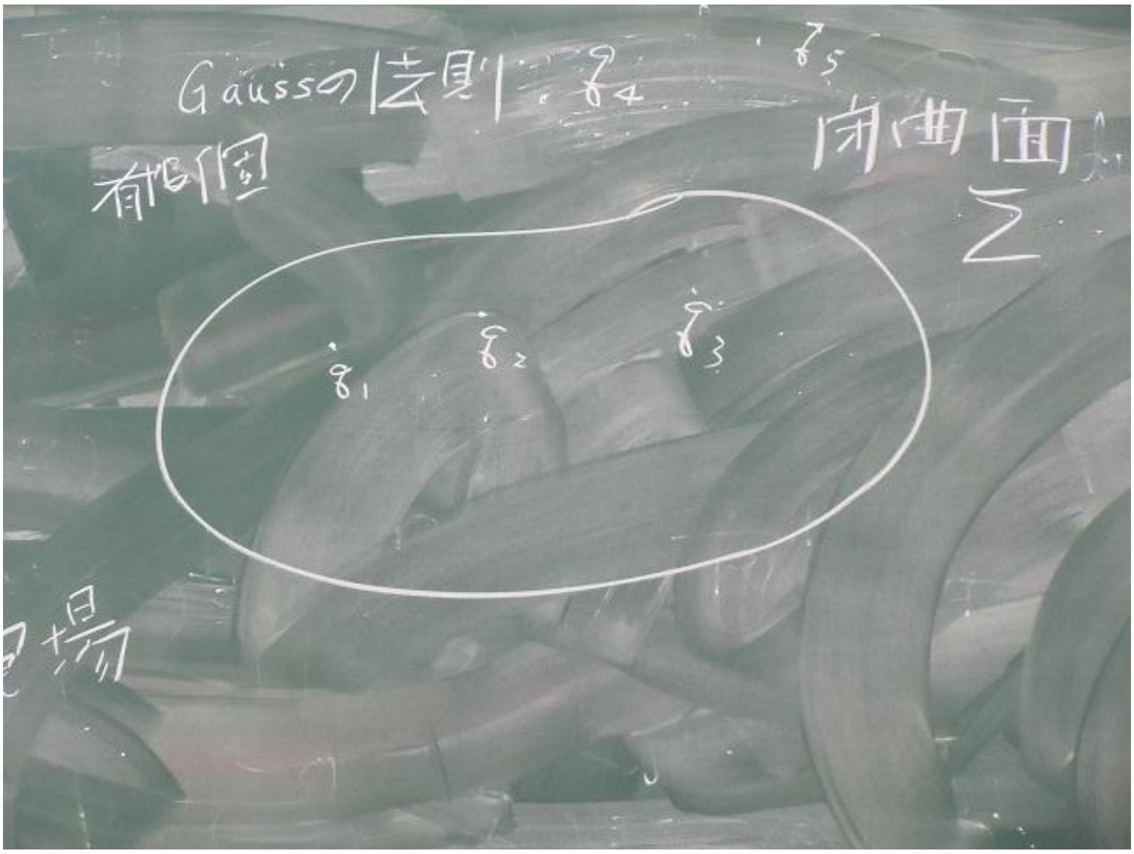

原点
単位電荷
電場
αは実数
$\mathrm{div}\,(r^{\alpha}\boldsymbol{r})$
$\boldsymbol{r}$
位置
ベクトル
$kq\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$
$|\boldsymbol{r}|=r$
$=\dfrac{kq}{r^3}\boldsymbol{r}$
$\alpha=-3$
$=$
$=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}+$
$+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}+$
$+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}+$
$=3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}$
$=(3+\alpha)(x^2+y^2+$


は実数
$\mathrm{div}\,(r^{\alpha}\boldsymbol{r})$
逆2乗の法則
3乗
$=$
$=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}+x^2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}$
$+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}+y^2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}$
$+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}+z^2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}$
$=3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}(x^2+y^2+z^2)\alpha$
$=(3+\alpha)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}=0$
$\alpha=-3$


Gaussの発散定理
3
Ω 領域
イカサマ
$\int_{\partial\Omega} ff = \int_{\Omega} \mathrm{div}\, ff$
内曲面
$= 0$


原点中心
半径 a
球面
$4\pi a^2 \times \frac{k\varepsilon}{a^2} = 4\pi k\varepsilon$


Gaussの発散定理が
成立つためには
問題の閉曲面で
囲まれた領域の
すべての点で
ベクトル場が定義
されている必要がある
電場
Gauss
有限個


Gaussの法則
有限個
q_4
q_5
閉曲面
Σ
q_1
q_2
q_3
電場

面(Σ)

Σ

ff 電場

$$\int_{\Sigma} ff \quad \text{面積分}$$

$$= 4\pi k(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$ff = ff_1 + ff_2 + ff_3 + ff_4 + ff_5$$

$$\int_{\Sigma} ff = \int_{\Sigma} ff_1 + \cdots + \int_{\Sigma} ff_5$$

$$\int_{\Sigma} ff_4 = \int_{\Sigma} ff_5 = 0$$

$\Sigma \cup \Sigma_1$

$$\int_{\underset{\shortparallel}{\Sigma \cup \Sigma_1}} ff_1 = 0 \qquad \int_{\Sigma} ff_1 = \int$$

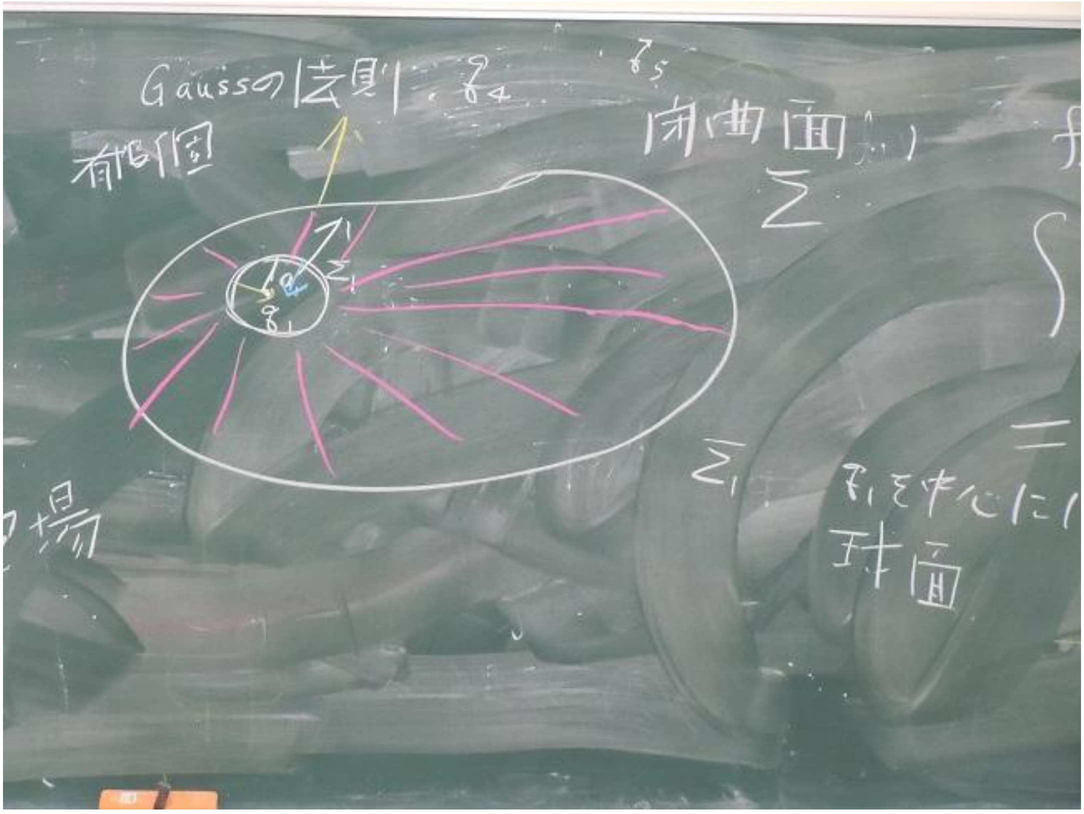
$$= 4\pi$$

$$\int_{\Sigma} ff_1 - \int_{\Sigma_1} ff_1 = 0$$

$$= 0 \qquad \int_{\Sigma} \mathcal{F}_1 = \int_{\Sigma_1} \mathcal{F}$$

$$= 4\pi k \mathcal{Q}_1$$

$$\mathcal{F}_1 = 0$$



Gaussの法則
有限個
閉曲面
Σ
q_4
q_5
q_1
Σ_1
Σ_1
q_1を中心に
球面
場