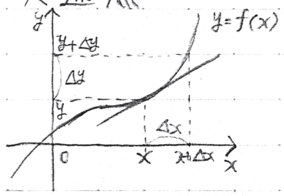
微分の2通りの考え方

・共通点



線が曲がっているのは嫌。

⇓

真っ直ぐなもので置きかえる。
接線

・19C〜の立場

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \fallingdotseq f'(x)\Delta x$ 極限において接線に近付く。
近似

・17, 18C Newtonらの立場

Δxが十分小さければ近似ではなく厳密に成立。

$\Delta x \in D = \{ d \in R \mid d^2 = 0 \}$ ←Δxの条件

$(\forall f : D \to R)(\exists !\, a \in R)$
$(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + ad)$ } Lock-Lawvereの公理

「任意のDからRへの関数fに対して、
ある実数aが唯1つ定まって、
任意のDの元dに対して、
$f(d) = f(0) + ad$が成り立つようにできる。」

物理的な視点から見てみる

慣性の法則 (Newton)

力を受けない物体は等速度運動をする。

無限小における慣性の法則 (冪零無限小)

力を受けようが、経過時間が0くらいに小さい間は等速度運動をする。

$$f(x+d) - f(x) = \underbrace{a}_{f'(x)}d \qquad (\forall d = D)$$

色々な関数の$f'(x)$を出してみる($d^2=0$が前提)

・$f(x) = C$ (Cは定数)

$f(x+d) - f(x)$
$= C - C = 0 = 0 \cdot d$
$\Rightarrow f'(x) = 0$

・$f(x) = x$

$f(x+d) - f(x)$
$= \cancel{x} + d - \cancel{x} = d = 1 \cdot d$
$\Rightarrow f'(x) = 1$

・$f(x) = x^2$

$f(x+d) - f(x)$
$= (x+d)^2 - x^2$
$= \cancel{x^2} + 2xd + \cancel{d^2} - \cancel{x^2}$
$= 2xd$
$\Rightarrow f'(x) = 2x$

・$f(x) = x^n$

$f(x+d) - f(x)$
$= (x+d)^n - x^n$
$= \cancel{x^n} + nx^{n-1}d - \cancel{x^n}$ ※
$= nx^{n-1}d$
$\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

※$(x+d)^n$の展開項はd^2でほぼ打消。

Date 4 21

・$f(x)=$ (三角関数)

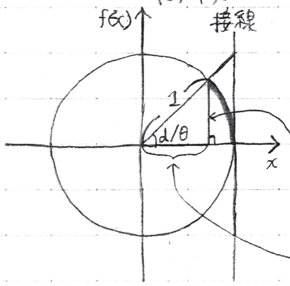
角度 ： ～中学 ： 度 $360°$

高校～ ： radian 2π

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$\sin d = d \quad \cos d = 1$

$\Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x = d^2+1^2=1$ 成立。



単位円

角度を

どう測るか？

垂線の長さ

$=\sin\theta$

これは$\cos\theta$

∘ $f(x)=\sin x$

$$\begin{aligned}
&f(x+d)-f(x)\\
&=\sin(x+d)-\sin x\\
&=\sin x\cos d+\cos x\sin d-\sin x\\
&=\cancel{\sin x}+\cos x\cdot d-\cancel{\sin x}\\
&=\cos x\cdot d
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f'(x)=\cos x$

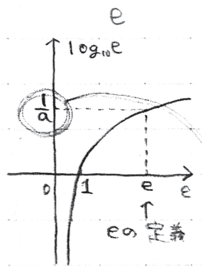
∘ $f(x)=\cos x$

$$\begin{aligned}
&f(x+d)-f(x)\\
&=\cos(x+d)-\cos x\\
&=\cos x\cos d-\sin x\sin d-\cos x\\
&=\cancel{\cos x}-\sin x\cdot d-\cancel{\cos x}\\
&=-\sin x\cdot d
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f'(x)=-\sin x$

・$f(x)=$ (指数関数)

底 ： 10 ＊ e について ＊



定義 ： $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ← 極限

ここで、$10^d=10^0+ad=1+ad$ $(\forall d\in D)$ $d\in D$ なら $ad\in D$

唯1つ$(\exists !)$

$e^d=(10^{\log_{10}e})^d=10^{d\log_{10}e}=1+(a\log_{10}e)d$

∘ $f(x)=10^x$

$10^{x+d}=10^x 10^d$ (指数法則) なので

$$\begin{aligned}
f(x+d)-f(x)&=10^{x+d}-10^x\\
&=10^x10^d-10^x\\
&=10^x(10^d-1)\\
&=10^x(\cancel{1}+ad-\cancel{1})\\
&=10^x ad
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f'(x)=10^x a$

∘ $f(x)=e^x$

$$\begin{aligned}
&f(x+d)-f(x)\\
&=e^{x+d}-e^x\\
&=e^xe^d-e^x\\
&=e^x(e^d-1)\\
&=e^x(\cancel{1}+d-\cancel{1}) \leftarrow \log_{10}e=\frac{1}{a}\\
&=e^x d
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f'(x)=e^x$

∘ 三角関数と指数関数は実は親戚であった。 (数Ⅱ ・ 多項式)

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \qquad f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$

$f(0)=a_0 \qquad f'(0)=a_1$

$f''(x)=2a_2+6a_3x+\cdots \Rightarrow a_2=f''/2 \quad a_3=f^{(3)}(0)/3$