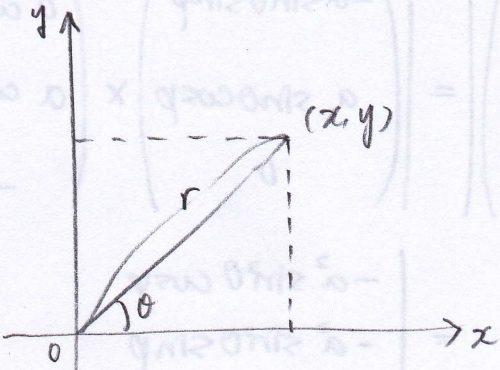
極座標

2次元

$(0 \leqq r < \infty)$

$(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



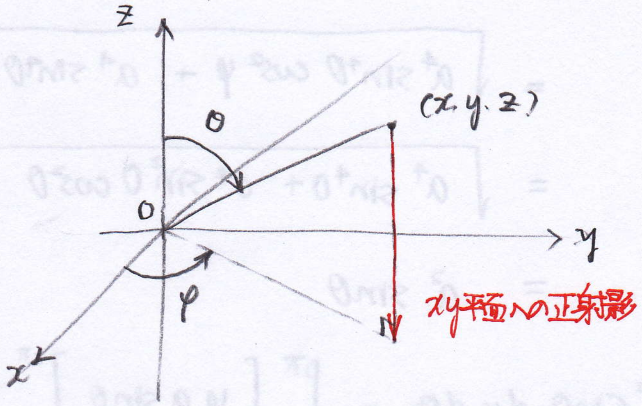
3次元

$(0 \leqq r < \infty)$

$(0 \leqq \theta < \pi)$

$(0 \leqq \varphi < 2\pi)$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



球の面積

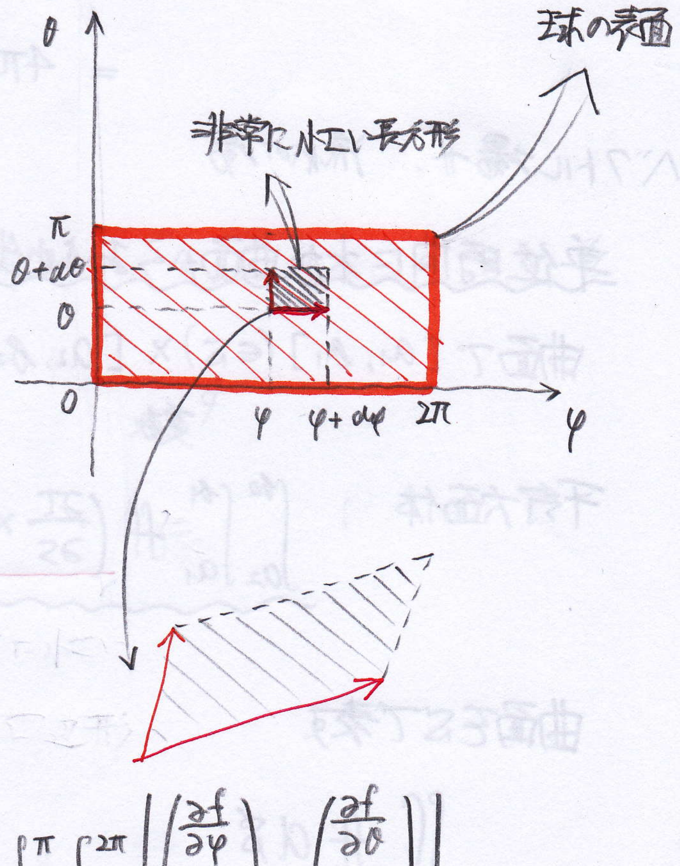
$4\pi a^2$ (天下り) 中学校

原点中心で半径 a の球

$r = a$

φ, θ による parameter 表示

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi = f(\varphi, \theta) \\ y = a\sin\theta\sin\varphi = g(\varphi, \theta) \\ z = a\cos\theta \qquad\quad = h(\varphi, \theta) \end{cases}$$



非常に小さい平行四辺形になる

この面積は

$$\left| \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial h}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \partial\varphi \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial h}{\partial \theta} \end{pmatrix} \partial\theta \right|$$

(× ベクトル積)

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial h}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial h}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| d\varphi\, d\theta$$

(計算)

$$\left|\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial g}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial h}{\partial\varphi}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\theta}\\ \frac{\partial g}{\partial\theta}\\ \frac{\partial h}{\partial\theta}\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-a\sin\theta\sin\varphi\\ a\sin\theta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\cos\theta\cos\varphi\\ a\cos\theta\sin\varphi\\ -a\sin\theta\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{matrix}-a^2\sin^2\theta\cos\varphi\\ -a^2\sin^2\theta\sin\varphi\\ -a^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - a^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\end{matrix}\right|$$

$$= \sqrt{a^4\sin^4\theta\cos^2\varphi + a^4\sin^4\theta\sin^2\varphi + a^4\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{a^4\sin^4\theta + a^4\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= a^2\sin\theta$$

$$\therefore \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} a^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi}\Big[\varphi a\sin\theta\Big]_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 2\pi a^2\sin\theta\, d\theta$$

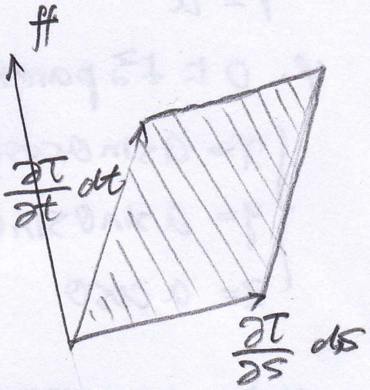
$$= 4\pi a^2 \quad /\!/$$

ベクトル場 $\mathbf{f}$、流れの場

単位時間に水が曲面からあふれ出てくるか？

曲面で $[a_1, b_1]\ (\in s) \times [a_2, b_2]\ (\in t) \to R^3$

（s：変数、t：変数）



平行六面体

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}\mathbf{f}\left(\frac{\partial\tau}{\partial s}\times\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)ds\,dt$$

（$\frac{\partial\tau}{\partial s}\times\frac{\partial\tau}{\partial t}$：面積）

曲面を S で表す

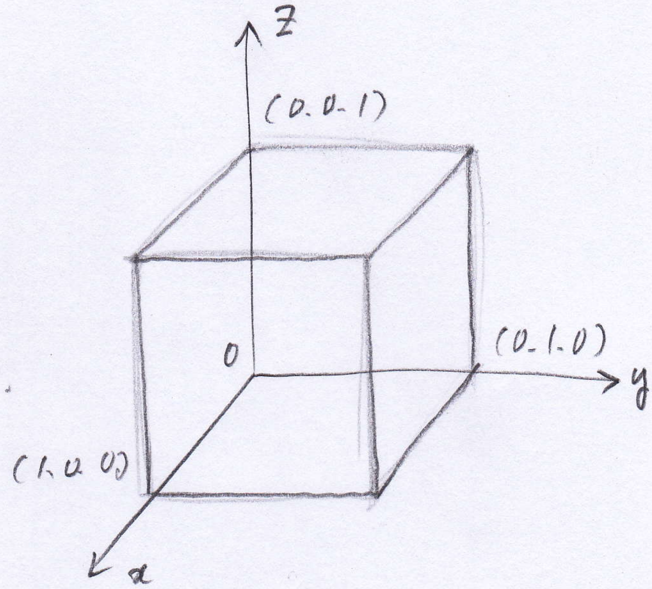
$$\iint_S \mathbf{f}\, d\mathbf{S}$$

（$\mathbf{S}$：大文字・太字）

＜レポート課題＞.

問題Ⅰ

$\mathbf{r}\quad (x, y, z) \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



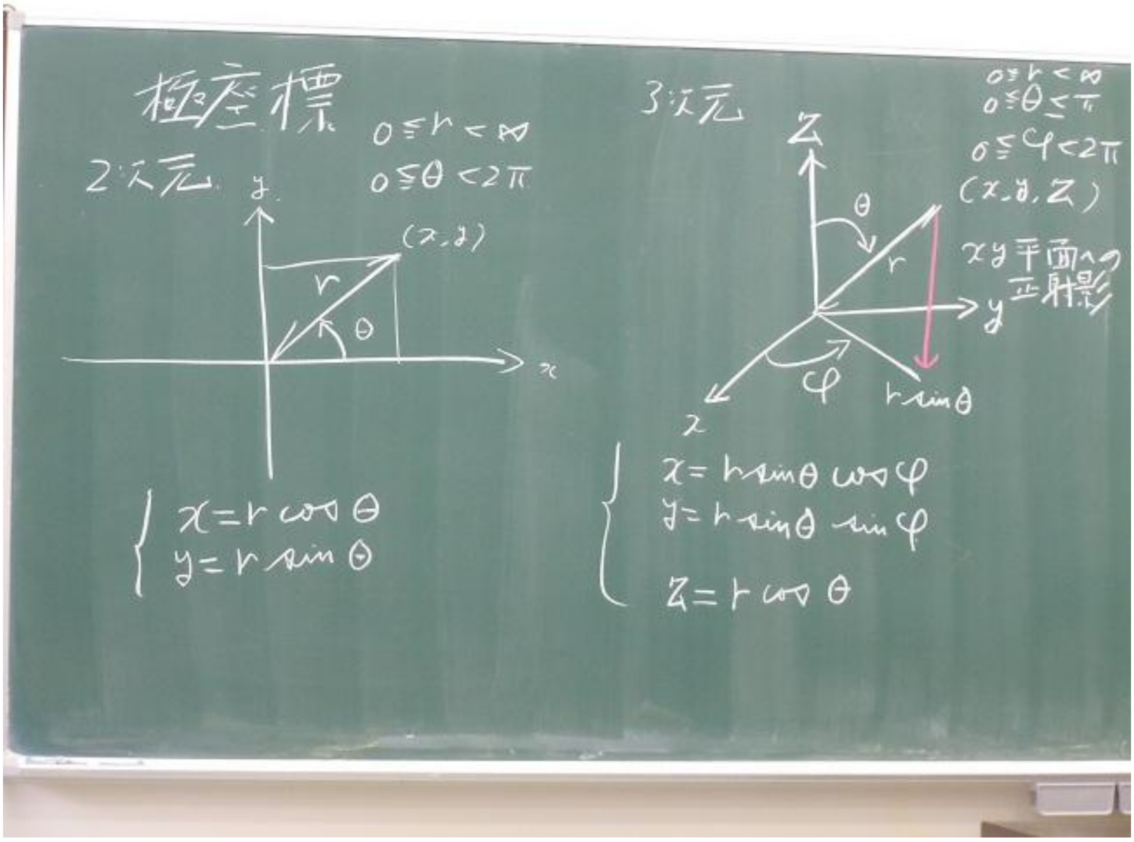
$\iint \mathbf{r}\, d\mathbf{S}$ を計算せよ.

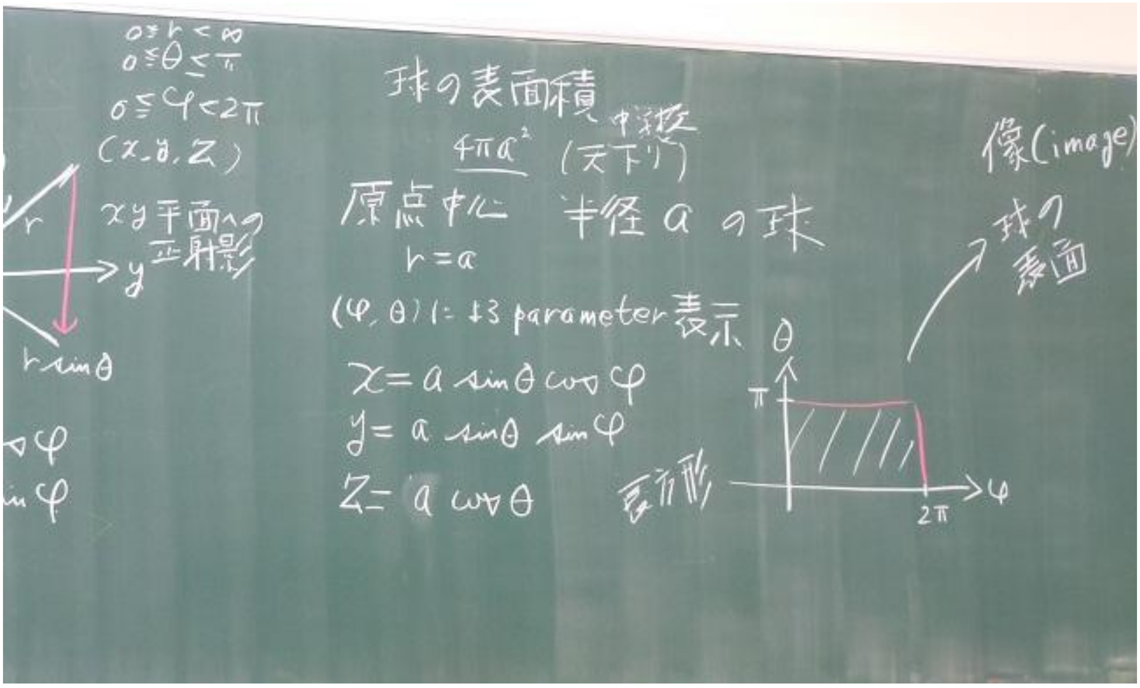
（S：立方体の表面）

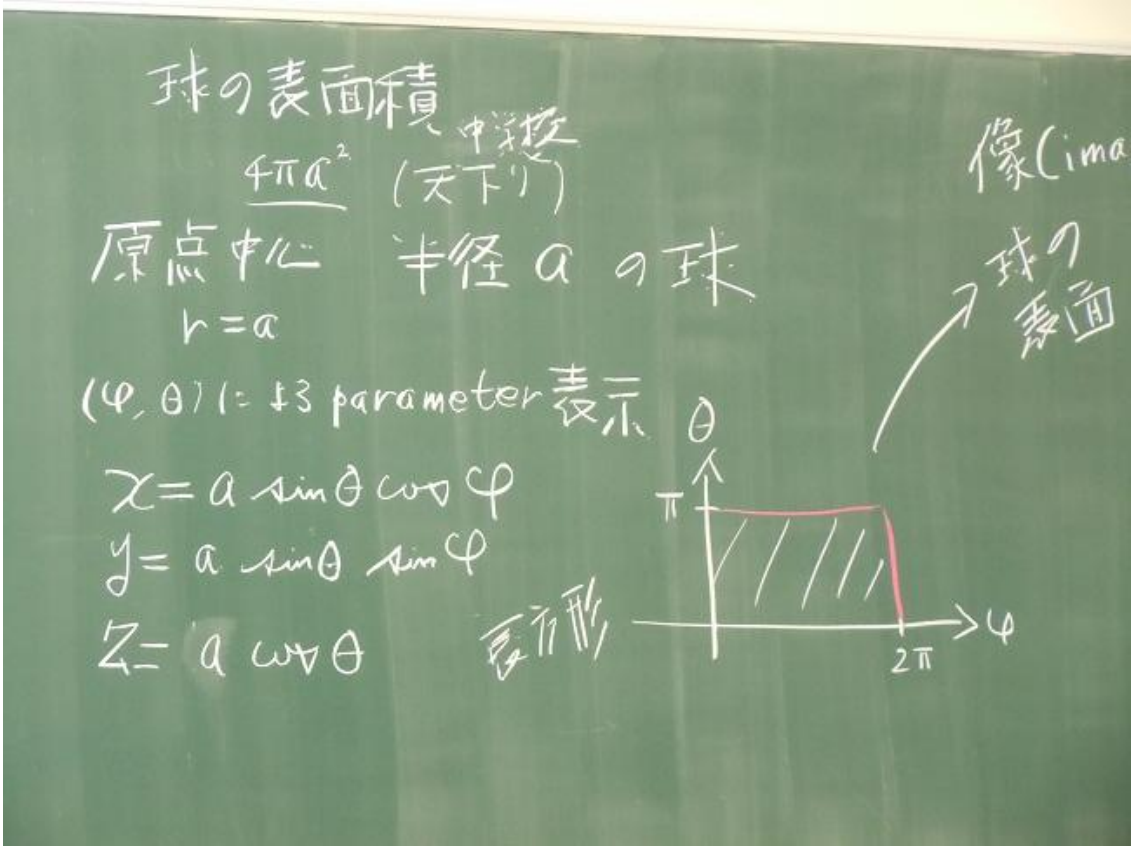
問題Ⅱ

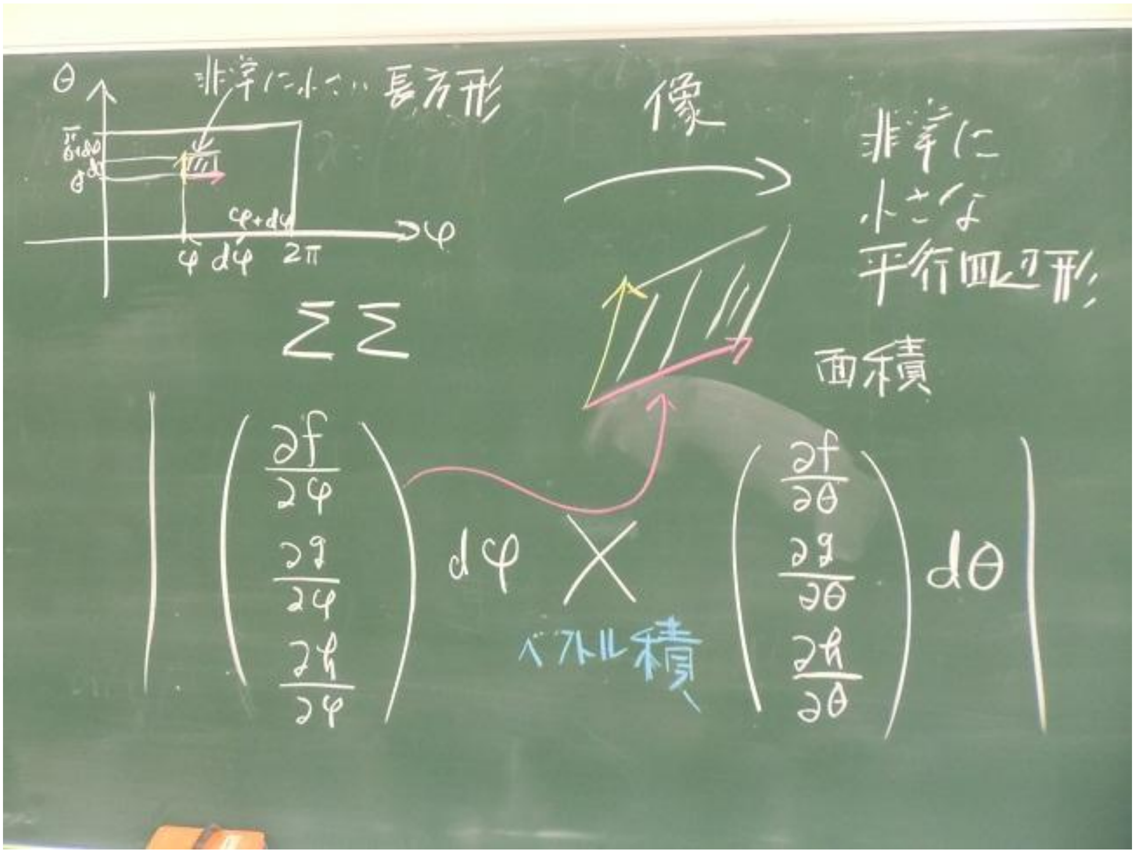
$$\iint_S \mathbf{r}\, d\mathbf{S}$$

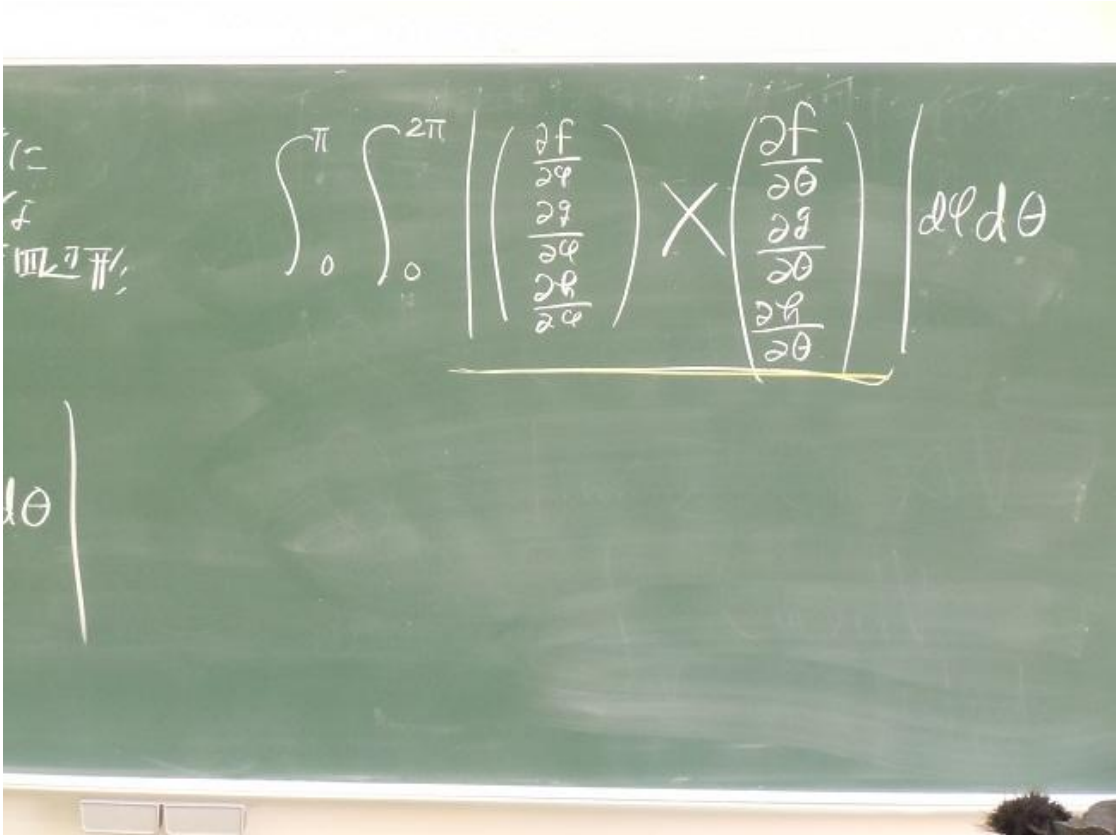
$(S: x^2+y^2+z^2=a^2)$

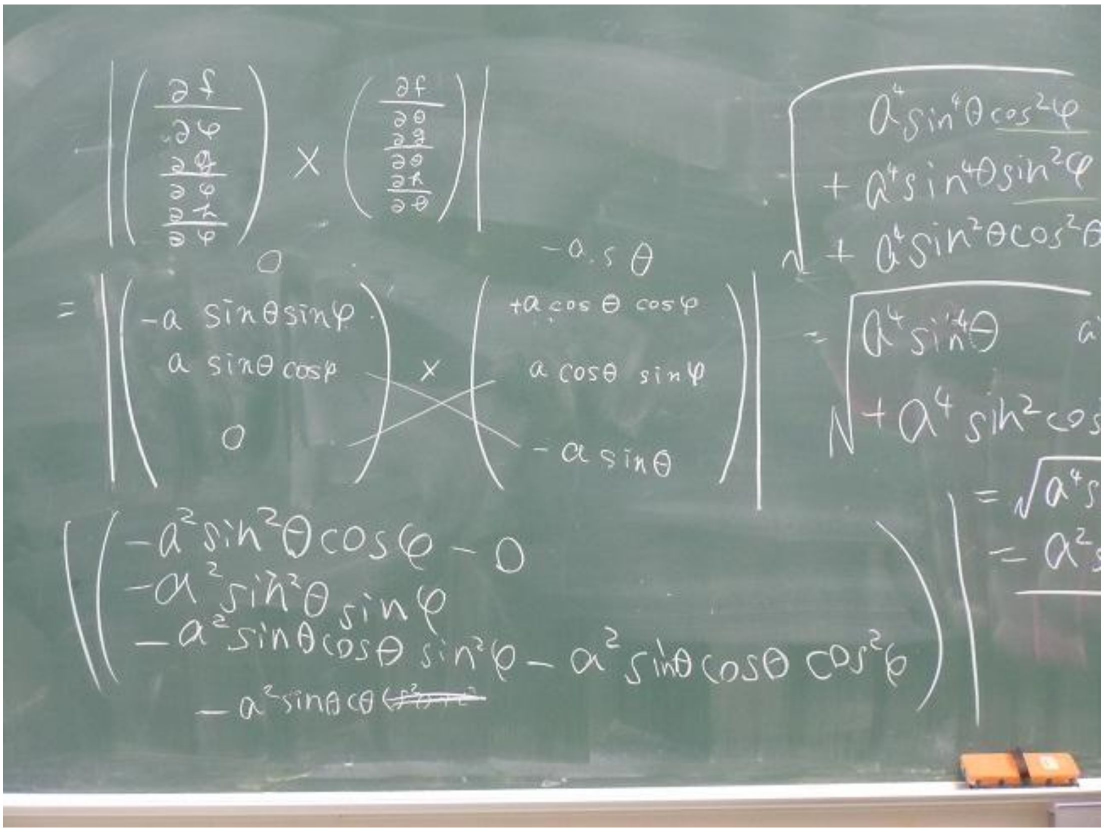

極座標
2次元
0≦r<∞
0≦θ<2π
(x,y)
r
θ
x=r cos θ
y=r sin θ
3次元
0≦r<∞
0≦θ≦π
0≦φ<2π
(x,y,z)
xy平面への正射影
r sin θ
x=r sinθ cos φ
y=r sinθ sin φ
z=r cos θ

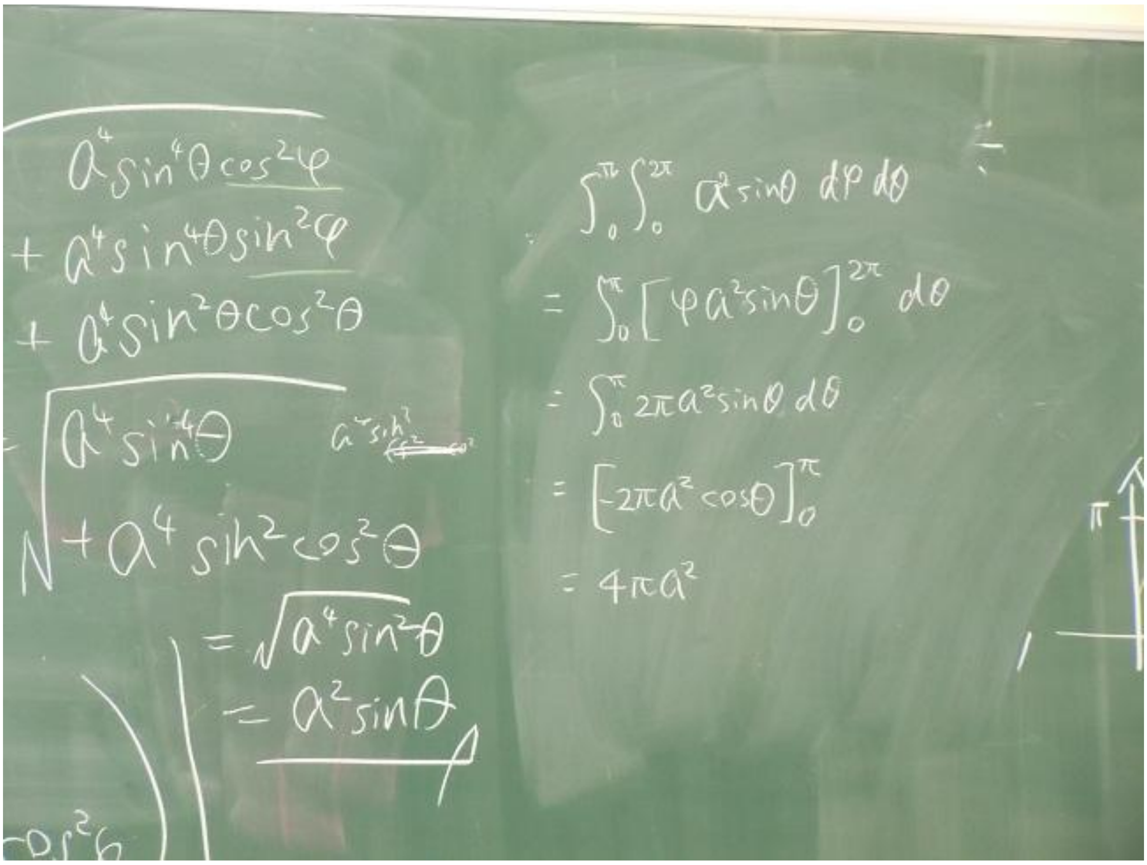

球の表面積
4πa² (天下り)
中学校
原点中心 半径 a の球
r=a
(φ,θ)による parameter表示
x=a sinθ cos φ
y=a sinθ sin φ
z=a cos θ
長方形
θ
π
2π
φ
像(image)
球の表面


球の表面積
中学校
$4\pi a^2$ (天下り)
原点中心 半径 a の球
r = a
(φ, θ) による parameter表示
$x = a \sin\theta \cos\varphi$
$y = a \sin\theta \sin\varphi$
$z = a \cos\theta$
長方形
θ
π
2π
φ
像(ima
球の表面


θ
非常に小さい長方形
φ
φ+dφ
dφ
2π
像
非常に小さな平行四辺形
面積
ΣΣ
$\left| \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi} \end{pmatrix} d\varphi \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} \end{pmatrix} d\theta \right|$
ベクトル積

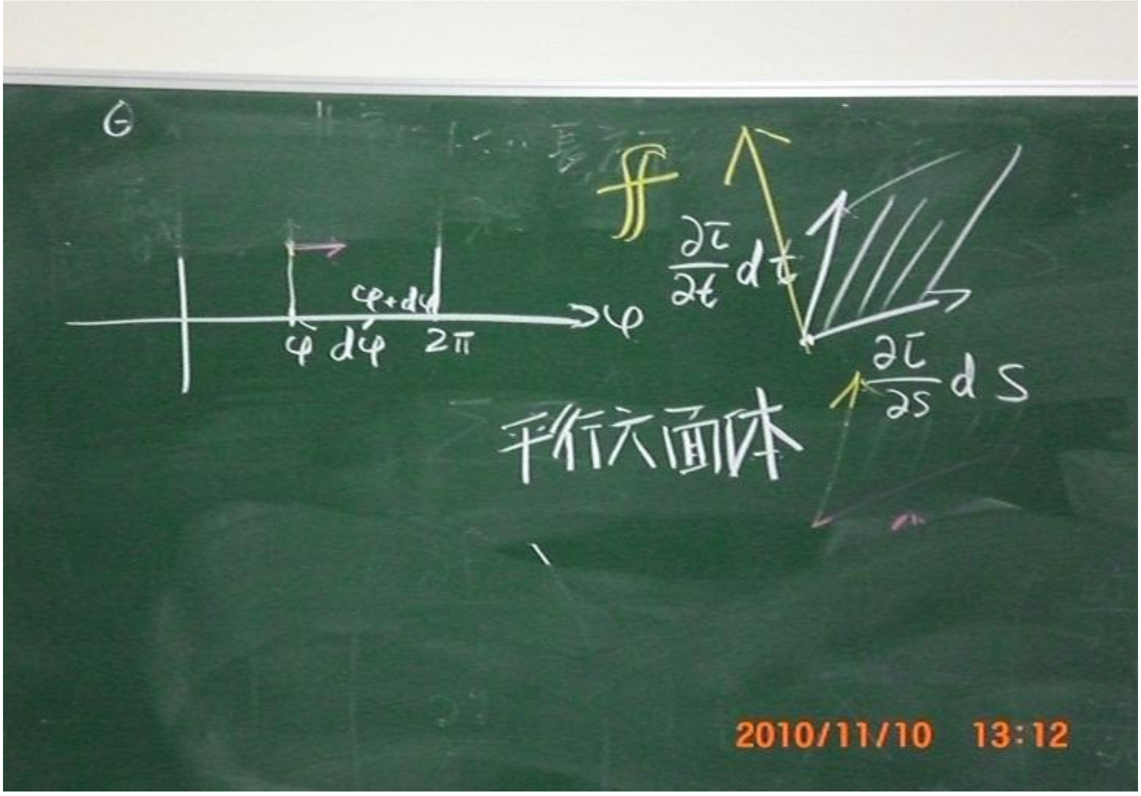

$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial g}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial h}{\partial\varphi}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\theta}\\ \frac{\partial g}{\partial\theta}\\ \frac{\partial h}{\partial\theta}\end{pmatrix}\right| d\varphi d\theta$

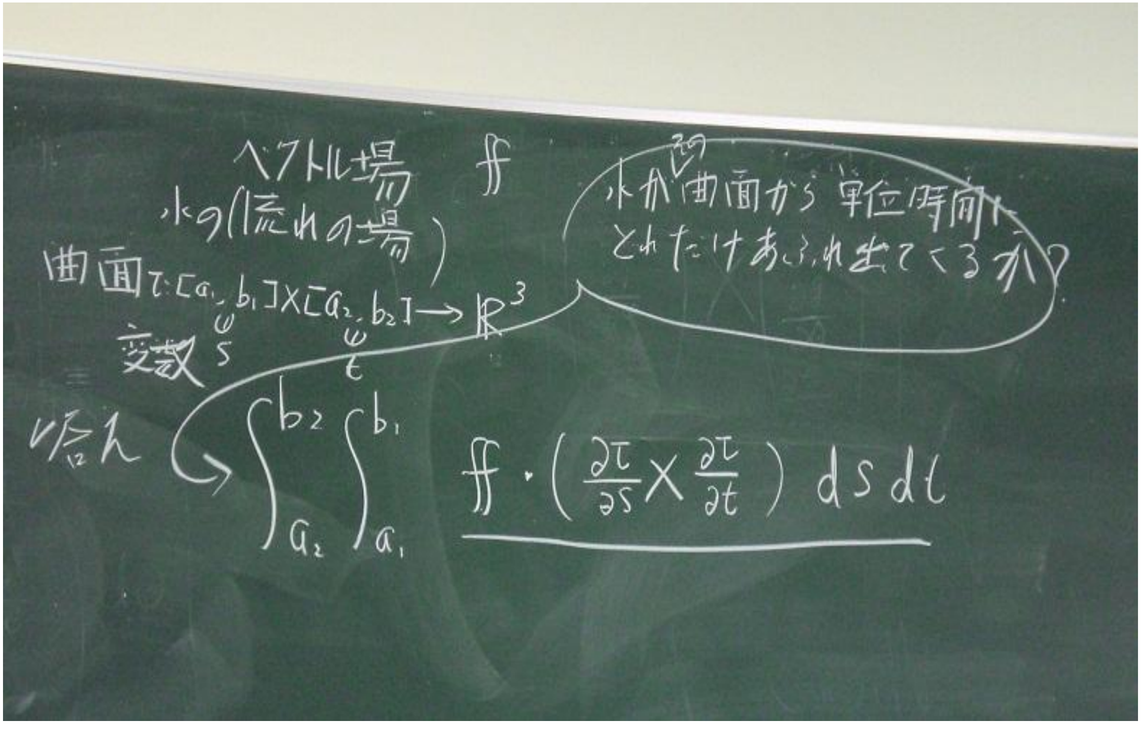

$\left|\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial g}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial h}{\partial\varphi}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\theta}\\ \frac{\partial g}{\partial\theta}\\ \frac{\partial h}{\partial\theta}\end{pmatrix}\right|$
$=\left|\begin{pmatrix}-a\sin\theta\sin\varphi\\ a\sin\theta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}+a\cos\theta\cos\varphi\\ a\cos\theta\sin\varphi\\ -a\sin\theta\end{pmatrix}\right|$
$-a^2\sin^2\theta\cos\varphi-0$
$-a^2\sin^2\theta\sin\varphi$
$-a^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi-a^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi$
$\sqrt{a^4\sin^4\theta\cos^2\varphi+a^4\sin^4\theta\sin^2\varphi+a^4\sin^2\theta\cos^2\theta}$
$=\sqrt{a^4\sin^4\theta+a^4\sin^2\cos}$

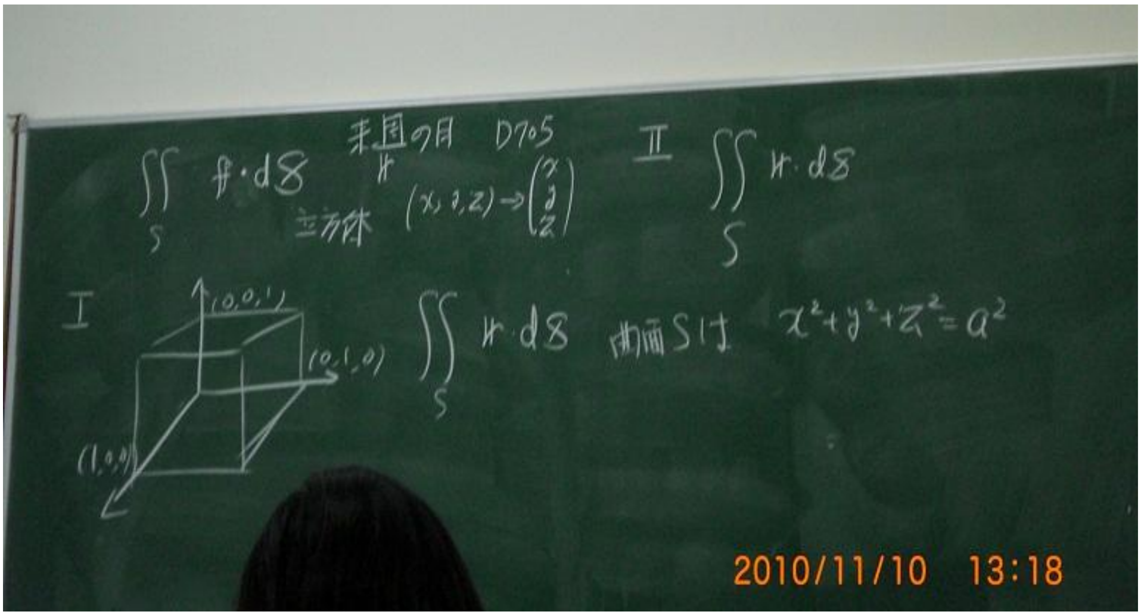


$a^4\sin^4\theta\cos^2\varphi$
$+ a^4\sin^4\theta\sin^2\varphi$
$+ a^4\sin^2\theta\cos^2\theta$
$= \sqrt{a^4\sin^4\theta + a^4\sin^2\cos^2\theta}$
$= \sqrt{a^4\sin^2\theta}$
$= a^2\sin\theta$
$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} a^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta$
$= \int_0^{\pi}\left[\varphi a^2\sin\theta\right]_0^{2\pi} d\theta$
$= \int_0^{\pi} 2\pi a^2\sin\theta\, d\theta$
$= \left[-2\pi a^2\cos\theta\right]_0^{\pi}$
$= 4\pi a^2$

ベクトル場 f
（水の流れの場）
曲面 $r: [a_1, b_1]\times[a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$
変数 s t
小さな曲面から単位時間にどれだけあふれ出てくるか？
平行六面体
$\frac{\partial r}{\partial t}dt$
$\frac{\partial r}{\partial s}ds$
$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial s}\times\frac{\partial r}{\partial t}\right) ds\, dt$


6
φ
dφ
2π
φ+dφ
∂r/∂t dt
∂r/∂s ds
平行六面体
2010/11/10 13:12

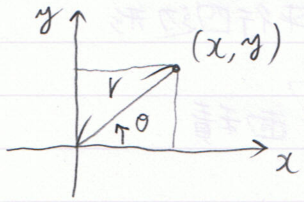

ベクトル場 ff
水の流れの場)
水が曲面から単位時間に
どれだけあふれ出てくるか?
曲面で[a1, b1]×[a2, b2]→R^3
変数 s t
∫a2^b2 ∫a1^b1 ff・(∂r/∂s × ∂r/∂t) ds dt


D705
立方体
(0,0,1)
(0,1,0)
(1,0,0)
曲面Sは
2010/11/10 13:18

11/10(水) 3限　微積分(生物学類)

極座標

2次元

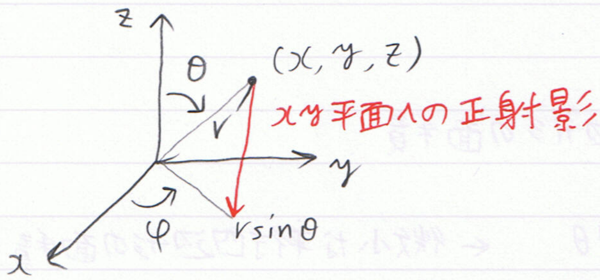


$0 \leq r < \infty$

$0 \leq \theta < 2\pi$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

3次元



$0 \leq r < \infty$
$0 \leq \theta < \pi$
$0 \leq \varphi < 2\pi$

$x = r\sin\theta\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\sin\varphi$
$z = r\cos\theta$

球の表面積

$4\pi a^2$ (天下り)

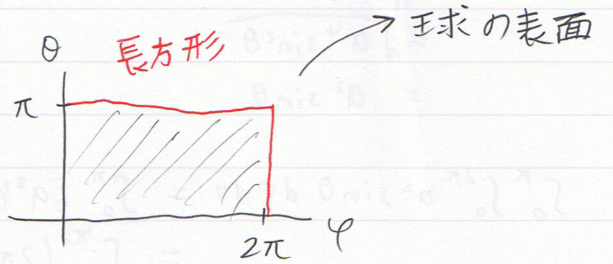
原点中心　半径 a の球

$r = a$

(φ, θ) による parameter 表示

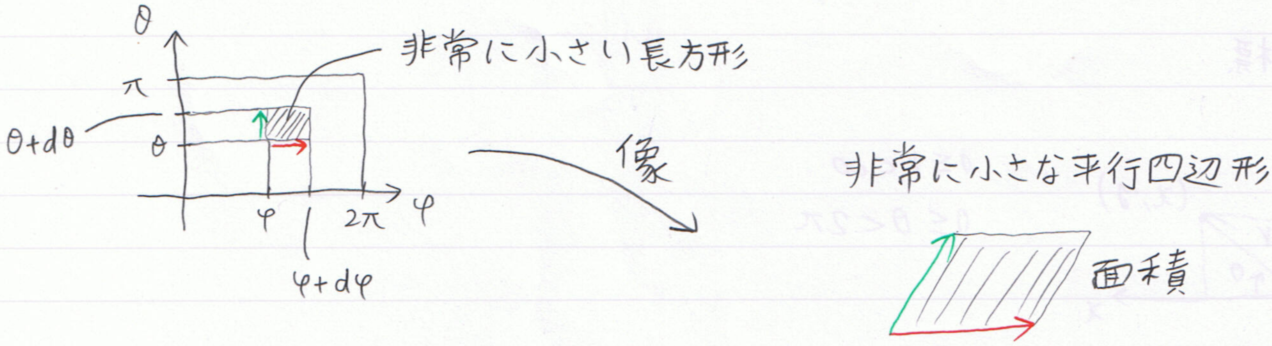
$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi = f(\varphi,\theta) \\ y = a\sin\theta\sin\varphi = g(\varphi,\theta) \\ z = a\cos\theta = h(\varphi,\theta) \end{cases}$$

とおく



NO.

DATE



$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi} \end{pmatrix} d\varphi \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} \end{pmatrix} d\theta \right|$$

↑ ベクトル積

ベクトルの長さ ＝ 平行四辺形の面積

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| d\varphi\, d\theta$$

← 微小な平行四辺形の面積を足し合わせると球の表面積になる

$$\left| \begin{pmatrix} -a\sin\theta\sin\varphi \\ a\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\varphi \\ a\cos\theta\sin\varphi \\ -a\sin\theta \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \left(-a^2\sin^2\theta\cos\varphi,\ -a^2\sin^2\theta\sin\varphi,\ -a^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - a^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi \right) \right|$$

$$= \sqrt{a^4\sin^4\theta\cos^2\varphi + a^4\sin^4\theta\sin^2\varphi + a^4\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{a^4\sin^2\theta}$$

$$= a^2\sin\theta$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} a^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi} \left[a^2\varphi\sin\theta \right]_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} (2\pi a^2\sin\theta)\, d\theta$$

$$= 2\pi a^2 \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi a^2 \cdot 2$$

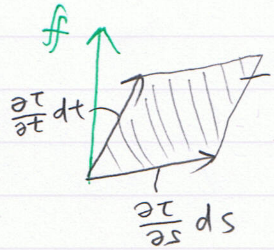
$$= 4\pi a^2$$

ベクトル場 $\mathbb{f}$
(流れの場)

水がその曲面から単位時間にどれだけあふれ出てくるか？

曲面 $\tau : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$

変数 → s, t



この微小な平行四辺形を流れる水の量は左の3つのベクトルで張られる平行六面体の体積

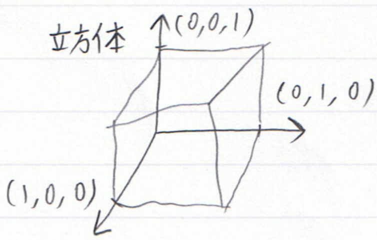
⇓

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \mathbb{f} \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial s} \times \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) ds\, dt$$

$$\iint_S \mathbb{f} \cdot d\mathbb{S}$$

← 微小な平行四辺形の面積を表わすベクトル

問題 I　立方体



$\mathbb{v} \quad (x, y, z) \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\iint_S \mathbb{v} \cdot d\mathbb{S}$$

↑ 立方体

問題 II　$\iint_S \mathbb{v} \cdot d\mathbb{S}$

曲面 S は $x^2 + y^2 + z^2 = a$