grad(ient) 勾配

2010.10.27

ベクトル場　力の場

線積分

$\Gamma [a,b] \to \mathbb{R}^3$　曲線

$\int_\Gamma \mathbb{F}\, d\mathbb{r}$ 〜 Γに沿って動いた折に$\mathbb{F}$によってされる仕事の量

スカラー場

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\mathbb{F} = \mathrm{grad}\, \varphi$ とかけるとき....

微積分の基本定理

$$\int_\Gamma \mathbb{F}\, d\mathbb{r} = \varphi(\Gamma(b)) - \varphi(\Gamma(a))$$

「力の場$\mathbb{F}$が保存力」

$\Updownarrow$ definition

「$\int_\Gamma \mathbb{F}\, d\mathbb{r}$が始点と終点だけできまる」

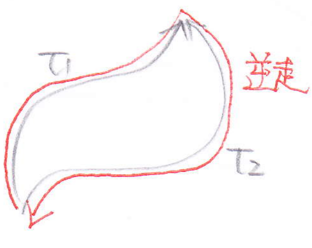
$\Updownarrow$　　(i) $\downarrow$　$\uparrow$ (ii)

「任意の閉路Γについて $\int_\Gamma \mathbb{F}\, d\mathbb{r} = 0$」

閉路(circuit)

(i) $a = b$.

(ii)



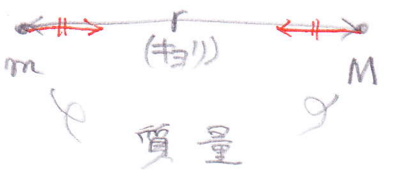
$$\int_{\Gamma_1} \mathbb{F}\, d\mathbb{r} - \int_{\Gamma_2} \mathbb{F}\, d\mathbb{r} = 0$$

$$\int_{\Gamma_1} \mathbb{F}\, d\mathbb{r} = \int_{\Gamma_2} \mathbb{F}\, d\mathbb{r}$$

$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$　$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = f_3 \end{array} \right\}$ 偏微分方程式

$x' = x$ 常微分方程式

Newtonの万有引力の法則



$$\frac{GmM}{r^2}$$ 逆二乗の法則：キョリの二乗に反比例している

クーロン力

$$\frac{kQq}{r^2}$$ 逆二乗の法則

→同符号：反発

保存力

[定理]

力の場 $\mathbb{f}$ が保存力ならば

$$\mathbb{f} = \mathrm{grad}\,\varphi$$

とかけるスカラー場 φ が存在する

(証明)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x+d \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

x_0(固定)

$$\mathbb{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$\varphi(x) =$ (x_0からxまで動いた折の$\mathbb{f}$の線積分の値)

$= \int_T \mathbb{f}\, dr$ well-defined

$\varphi(x+d, y, z) - \varphi(x, y, z) \quad d \in D$

$= f_1(x, y, z)\, d$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad \square$$

$\mathbb{f} = \mathrm{grad}\,\varphi$ とかけるとき $-\varphi$ を potential energy という

Newton

力学

三法則

第1法則 : 慣性の法則

第2法則 : $m a(t) = f(x(t))$

第3法則 : 作用・反作用の法則

$x(t)$

質点 (位置はある, 大きさはない)

運動している物体の位置

m

質量

$$\begin{cases} v(t) = x'(t) = \text{速度} \\ a(t) = x''(t) = \text{加速度} \end{cases}$$

$$(\text{運動エネルギー}) = \frac{1}{2} m\, v(t) \cdot v(t)$$

f は保存力と仮定する

$$f = \mathrm{grand}(-\varphi)$$

φ : potential energy

命題 (エネルギーの保存則)

t にかかわらず

$$\frac{1}{2} m\, v(t) \cdot v(t) + \varphi(x(t)) = \text{一定}$$

(証明)

左辺をtで微分

$$\frac{1}{2}m\{\mathbb{v}'(t)\cdot\mathbb{v}(t)+\mathbb{v}(t)\cdot\mathbb{v}'(t)\} + \varphi'(x(t))\,x'(t)$$

$$= m\,a(t)\cdot\mathbb{v}(t) \qquad\qquad = \mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathbb{v}(t)$$

$$=\underbrace{(\mathrm{grad}\,\varphi + m\,a(t))}_{=}\,\mathbb{v}(t)$$

Newtonの第2法則から 0.

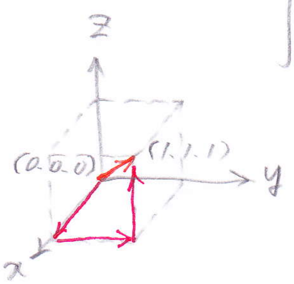
エネルギーの保存則

物理法則が時間,位置に依存しない.

力の場

レポート問題

I $\mathbb{f}=\begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$ $\int \mathbb{f}\, d\mathbb{r}$ (赤,オレンジのときそれぞれ計算)

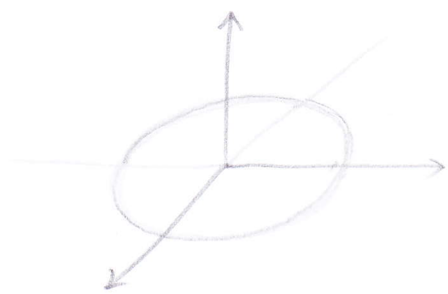


II $\mathbb{f}=\begin{pmatrix} x \\ 2y \\ z \end{pmatrix}$ のとき

III $x^2+y^2=a^2$

$z=0$

$\mathbb{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\int \mathbb{r}\, d\mathbb{r}$



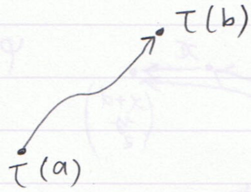
(月曜日まで)

10/27(水) 3限　微積分(生物学類)

grad(ient) 勾配

$\boldsymbol{f}$ ベクトル場　力の場

τに沿って動いた時に $\boldsymbol{f}$によってされる仕事の量 = 線積分 $\int_\tau \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$



$\tau : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 曲線

スカラー場

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}\,\varphi$ と書ける場合

微積分学の基本定理

$\int_\tau \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \varphi(\tau(b)) - \varphi(\tau(a))$

力の場 $\boldsymbol{f}$ が保存力 $\overset{\text{def}}{\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}}$ $\int_\tau \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ が始点と終点だけで決まる

$\Downarrow \ \Uparrow$

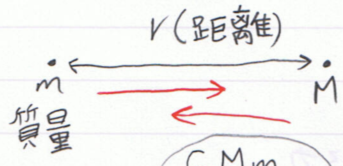
任意の閉路τについて $\int_\tau \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$
$(a=b)$

微分方程式

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= f_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= f_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= f_3 \end{aligned}\right\} \text{偏微分方程式}$$

$x' = x$
常微分方程式

Newton の万有引力の法則



$\frac{GMm}{r^2}$ 逆二乗の法則

保存力

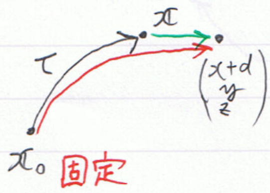
クーロン力

$\frac{KQq}{r^2}$ 逆二乗の法則　同符号　反発

定理

力の場 $\mathbb{f}$ が保存力であれば $\mathbb{f} = \mathrm{grad}\,\varphi$ と書ける スカラー場 φ が存在する

証明



$\varphi(\mathbb{x}) = \mathbb{x}_0$ から $\mathbb{x}$ まで動いた時の $\mathbb{f}$ の線積分の値

$= \int_\tau \mathbb{f}\cdot d\mathbb{r}$ well-defined

(保存力なので道によらずに決まる)

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mathbb{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$d \in D$

$$\varphi(x+d, y, z) - \varphi(x, y, z) = \quad - \quad = \quad = f_1(x, y, z)d_1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3 \qquad \mathbb{f} = \mathrm{grad}\,\varphi \quad //$$

$-\varphi$: potential energy

Newton

力学

三法則

1) 慣性の法則

2) $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 　 $\mathbb{x}(t)$ … 質点 質量 m

$\mathbb{v}(t) = \mathbb{x}'(t)$ = 速度

$\mathbb{a}(t) = \mathbb{x}''(t)$ = 加速度

$m\mathbb{a}(t) = \mathbb{f}(\mathbb{x}(t))$ $\mathbb{x}$ が時間 t の時に受けている力

3) 作用、反作用

運動エネルギー $\frac{1}{2}m\,\mathbb{v}(t)\cdot\mathbb{v}(t)$

$\mathbb{f}$ は保存力で、$\mathbb{f} = \mathrm{grad}(-\varphi)$ の時、φ は potential energy

命題 (エネルギーの保存則) 　物理法則が時間に依存しない

$$\frac{1}{2}m\,\mathbb{v}(t)\cdot\mathbb{v}(t) + \varphi(\mathbb{x}(t)) = \text{一定}$$

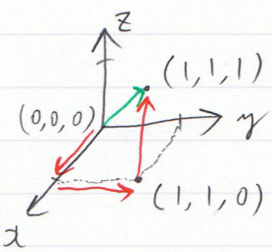
証明

左辺をtで微分

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\left\{\mathbb{v}'(t)\cdot\mathbb{v}(t)+\mathbb{v}(t)\cdot\mathbb{v}'(t)\right\}}_{m\mathbb{a}(t)\cdot\mathbb{v}(t)}+\underbrace{\varphi'(\mathbb{x}(t))(\mathbb{x}'(t))}_{(\mathrm{grad}\,\varphi)\cdot(\mathbb{v}(t))}$$

$$(\underbrace{m\mathbb{a}(t)+\mathrm{grad}\,\varphi}_{\overset{\shortparallel}{0}})\cdot\mathbb{v}(t)=0 \quad //$$

$$\mathbb{f}=\begin{pmatrix}x^2\\ y\\ xyz\end{pmatrix}$$



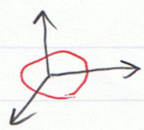
I $\int \mathbb{f}\cdot d\mathbb{r}$

↗と↙→↑で違うことを確認

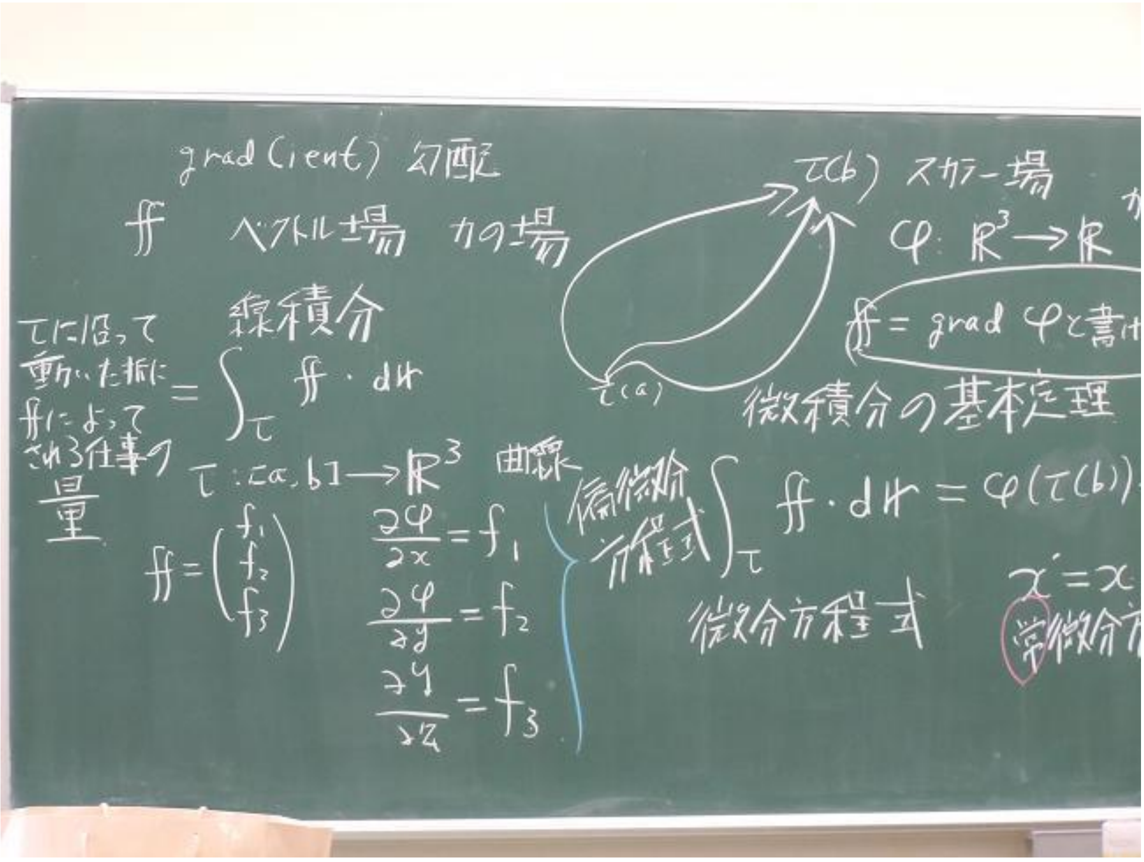
II $\mathbb{f}=\begin{pmatrix}x\\ zy\\ z\end{pmatrix}$ の時に $\int \mathbb{f}\cdot d\mathbb{r}$

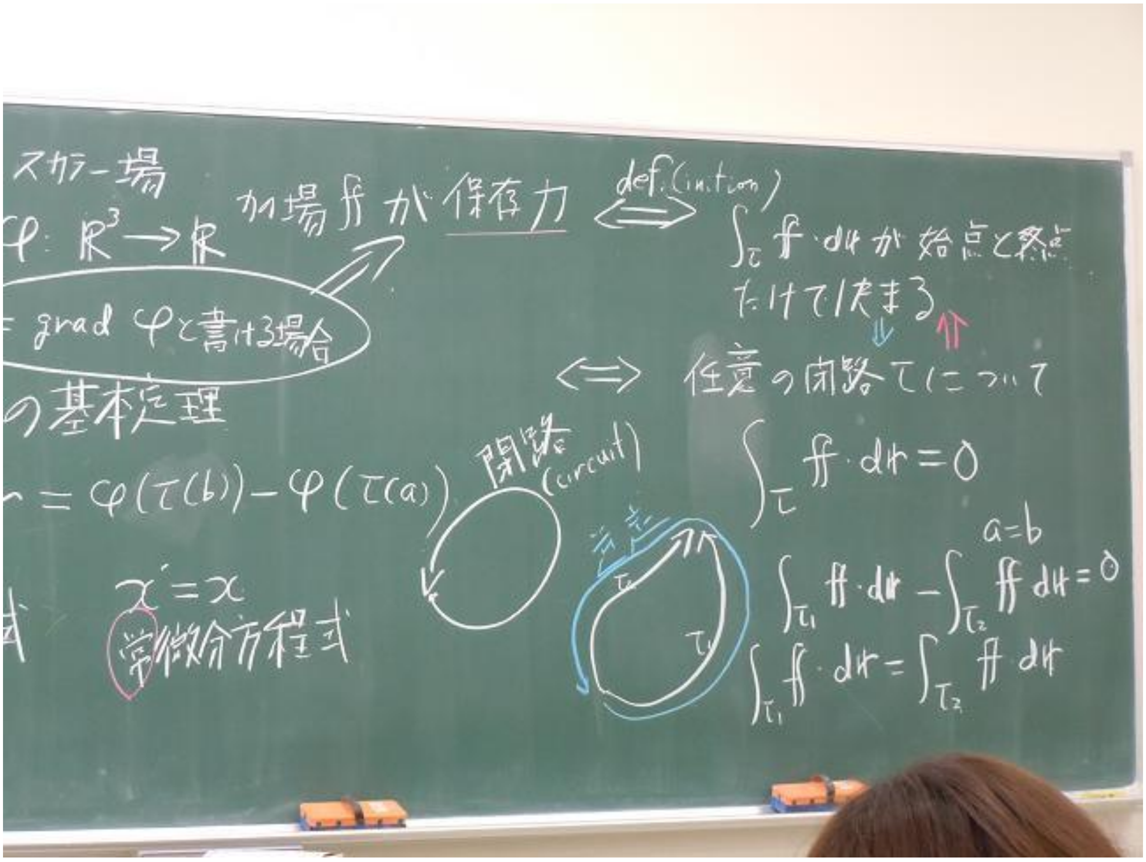
III $x^2+y^2=a^2$ $\quad \mathbb{r}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

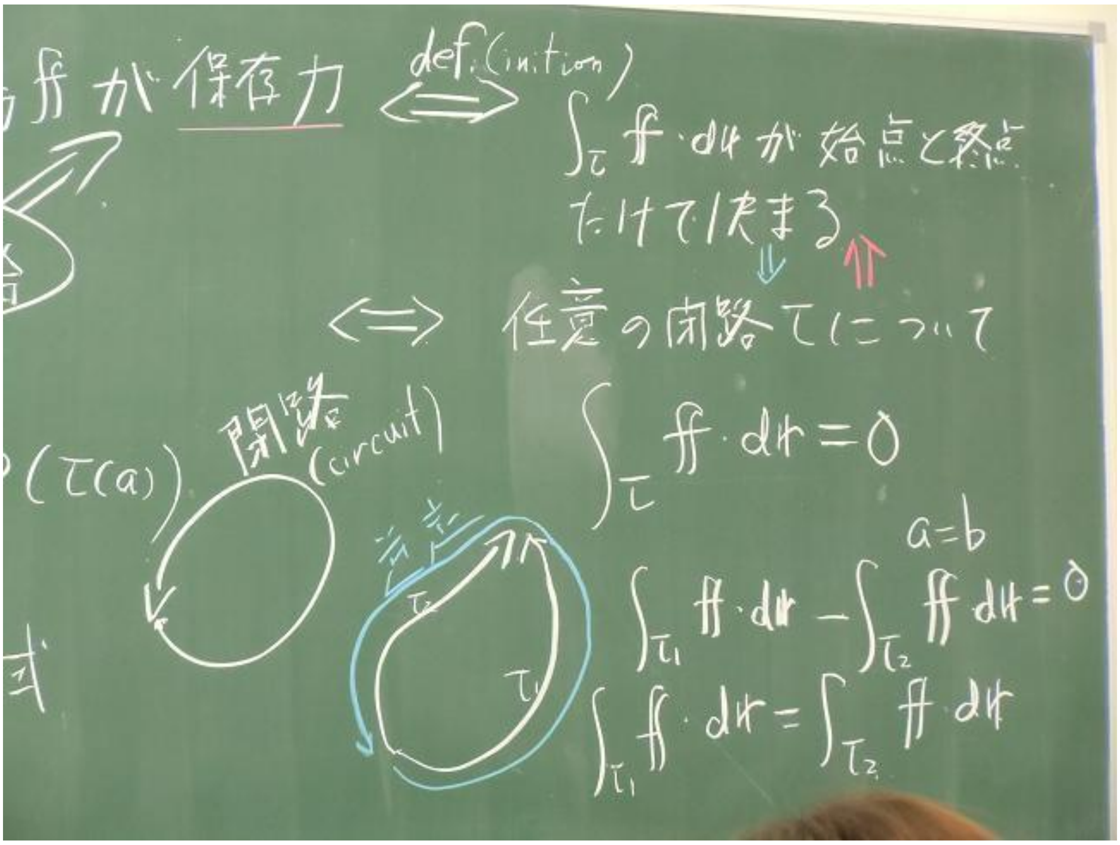
$z=0$

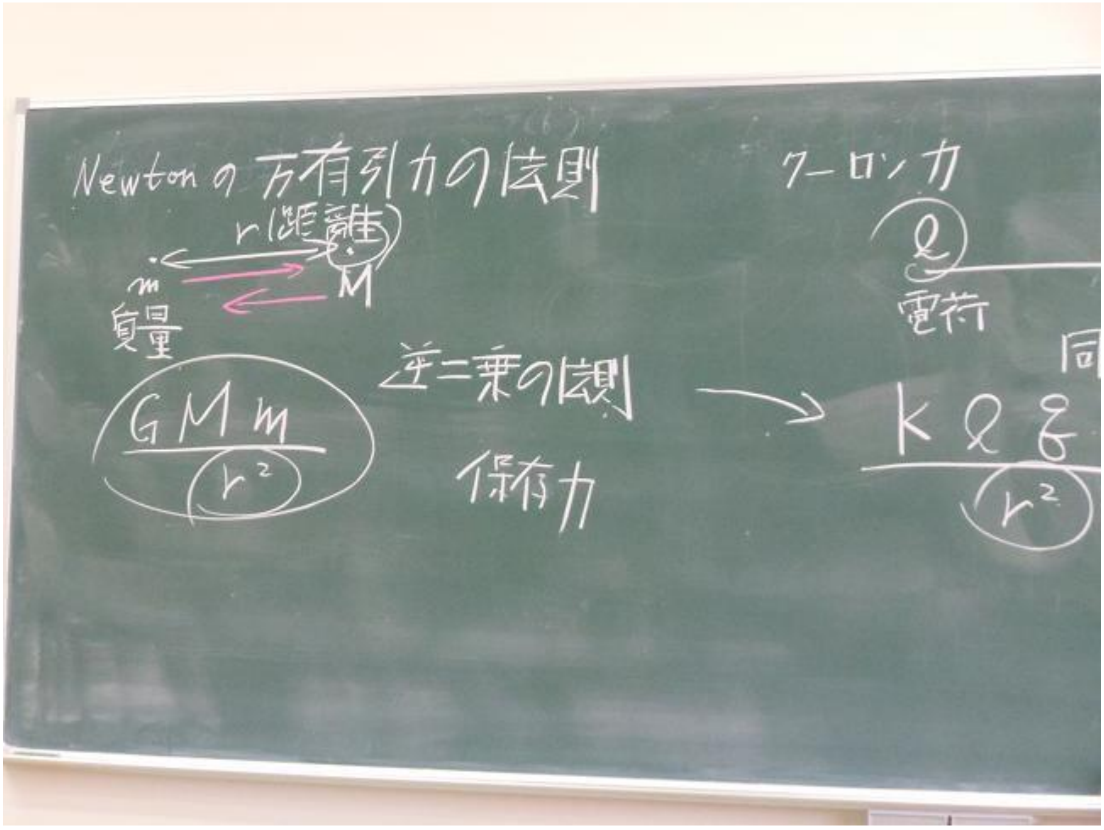


$\int \mathbb{r}\cdot d\mathbb{r}$

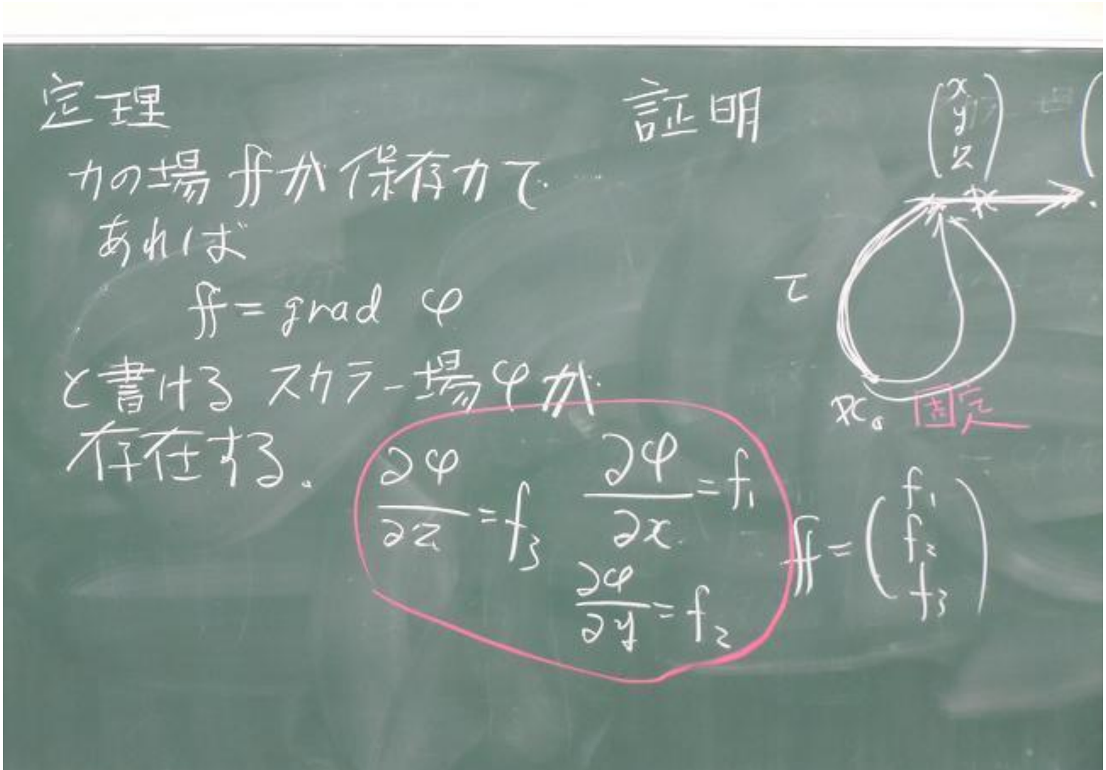

grad(ient) 勾配
ベクトル場 力の場
線積分
てに沿って動いた折にによってされる仕事の量
曲線
偏微分方程式
τ(b)
スカラー場
= grad φと書け
微積分の基本定理
微分方程式
常微分方程式

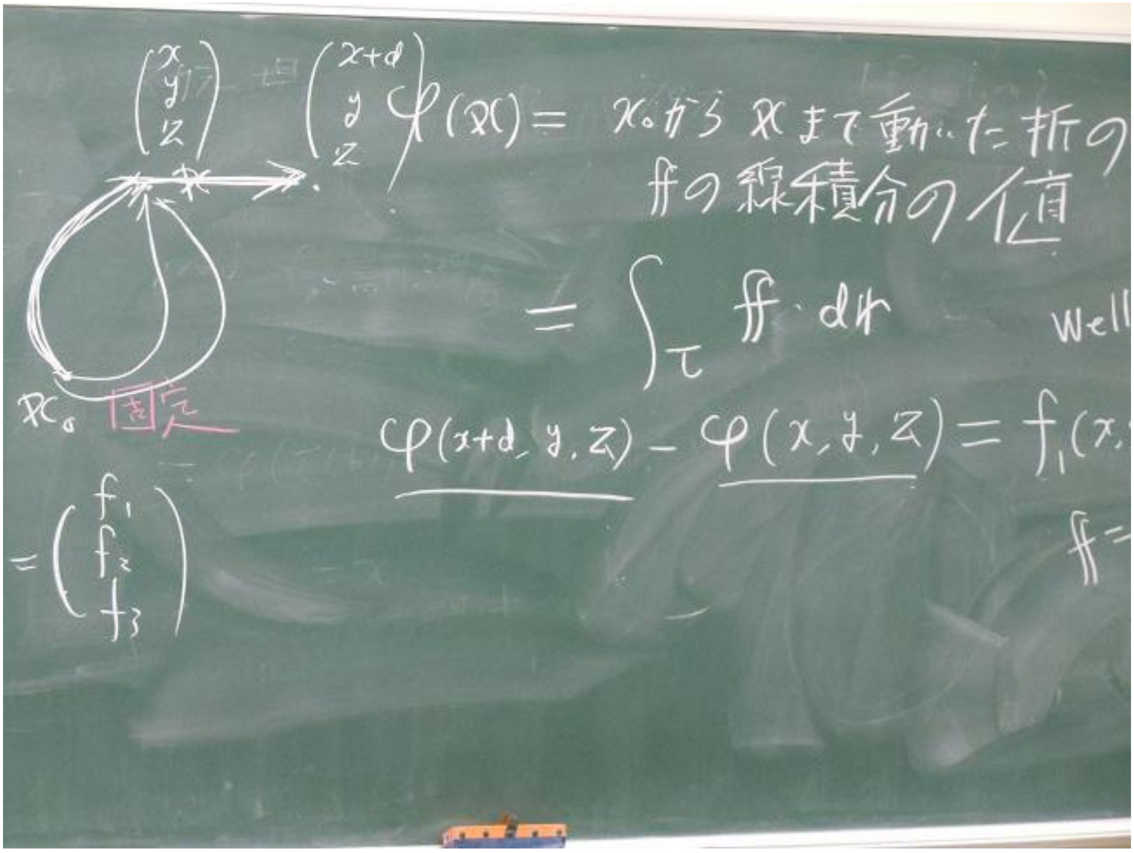

スカラー場
力場が保存力
def.(inition)
が始点と終点だけで決まる
= grad φと書ける場合
の基本定理
任意の閉路てについて
閉路 (circuit)
a=b
常微分方程式

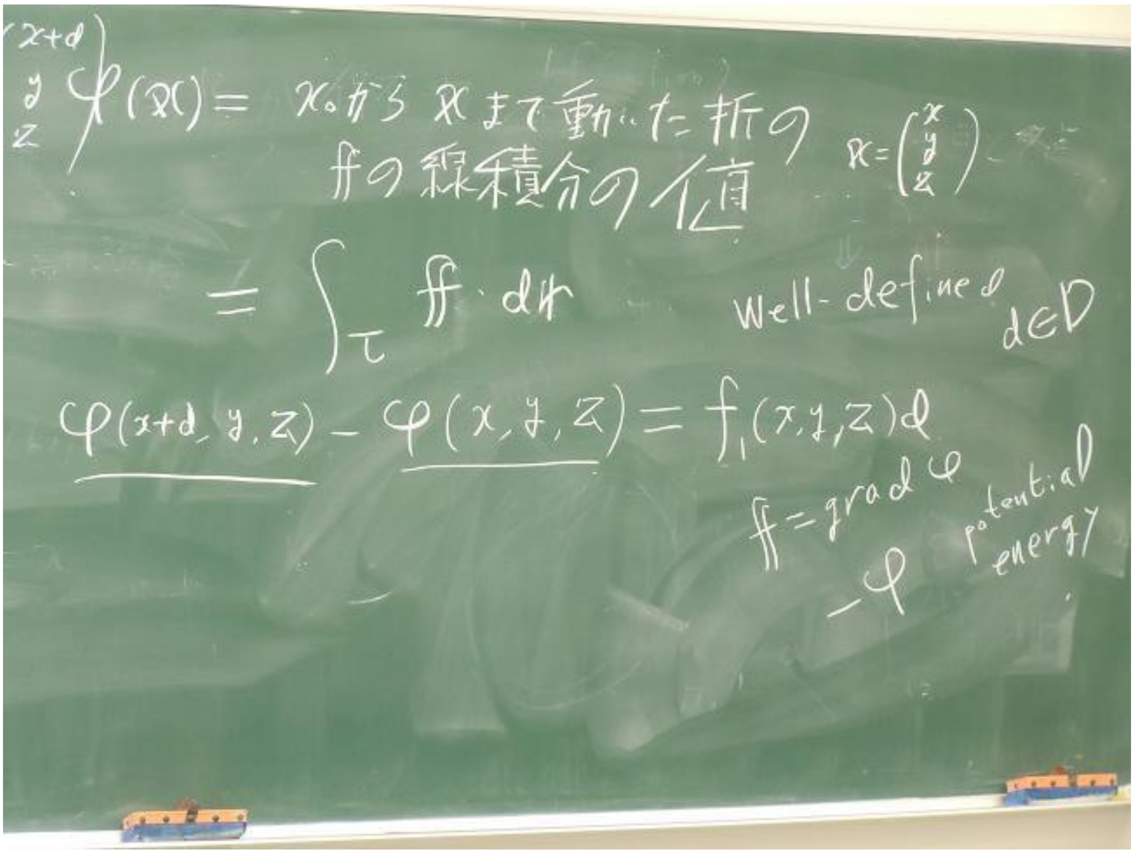

ff が 保存力
def.(inition)
∫C ff·dr が 始点と終点 だけで決まる
任意の閉路 C について
∫C ff·dr = 0
閉路 (circuit)
a=b
∫C1 ff·dr − ∫C2 ff dr = 0
∫C1 ff·dr = ∫C2 ff·dr


Newton の 万有引力の法則
r(距離)
m
M
質量
GMm / r²
逆二乗の法則
保存力
クーロン力
電荷


力の法則
クーロン力
Q
r
q
電荷
同符号 反発
逆二乗の法則
保存力
kQq
r²


定理
力の場 F が保存力で
あれば
F = grad φ
と書ける スカラー場 φ が
存在する。
∂φ/∂z = f3
∂φ/∂x = f1
∂φ/∂y = f2
証明
x
y
z
C
x0
固定
F = (f1 f2 f3)


$\varphi(x) =$ x_0から x まで動いた折の
f の線積分の値
$= \int_\tau f \cdot dr$
well
x_0 固定
$\varphi(x+d, y, z) - \varphi(x, y, z) = f_1(x,$
$= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$
$f =$


$\varphi(x) =$ x_0から x まで動いた折の
f の線積分の値
$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$= \int_\tau f \cdot dr$
well-defined
$d \in D$
$\varphi(x+d, y, z) - \varphi(x, y, z) = f_1(x, y, z)d$
$f = \mathrm{grad}\,\varphi$
$-\varphi$ potential energy

Newton

力学

三法則

1) 慣性の法則

2) $x(t)$ 位置 質点 質量 m

$v(t) = x'(t) =$ 速度

$a(t) = x''(t) =$ 加速度

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$m\,a(t) = F(x(t))$$

F は保存力

$F = \mathrm{grad}(-\varphi)$

$\varphi \in$ potential energy

3) 作用 反作用

運動量 ← → 位置

$$\underbrace{(m \cdot a(t) + \mathrm{grad}\,\varphi)}_{0} \cdot v(t)$$

物理法則が時間に依存しない

運動エネルギー $\frac{1}{2} m\, v(t) \cdot v(t)$

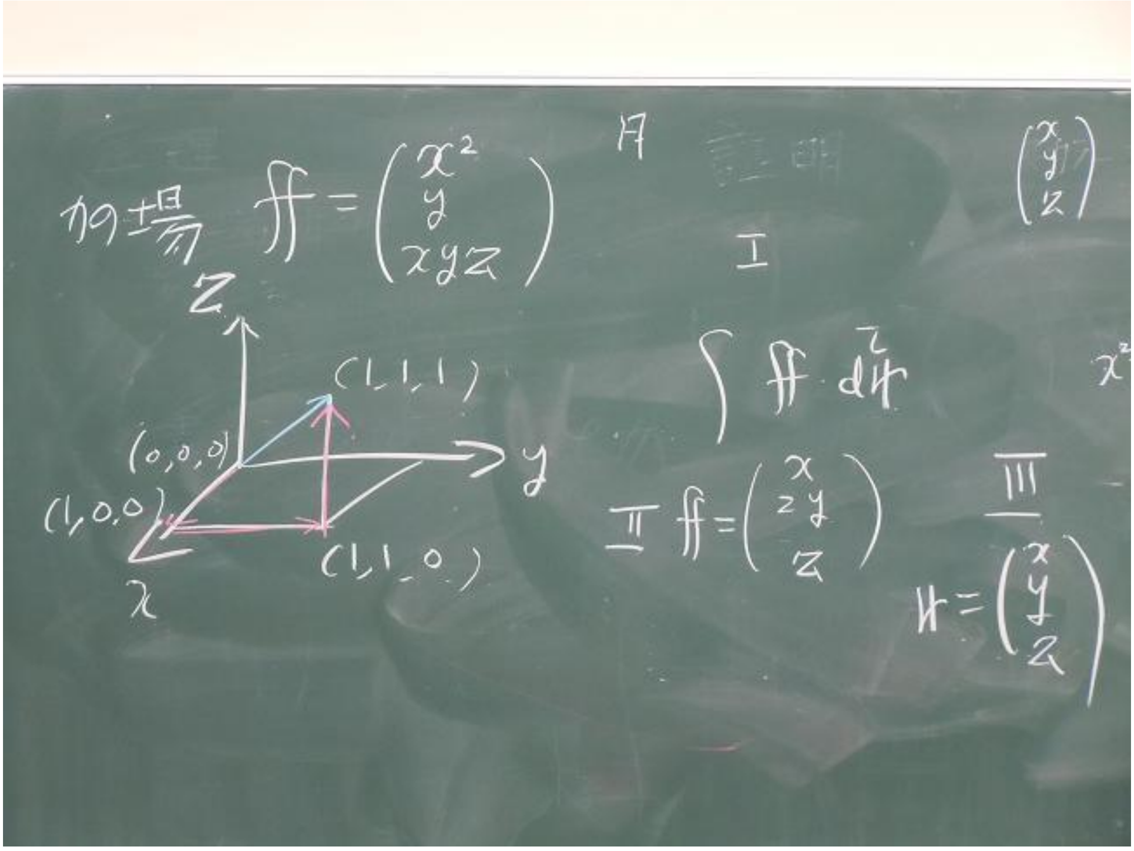
命題 (エネルギーの保存則)

$$\frac{1}{2} m\, v(t) \cdot v(t) + \varphi(x(t)) = 一定$$

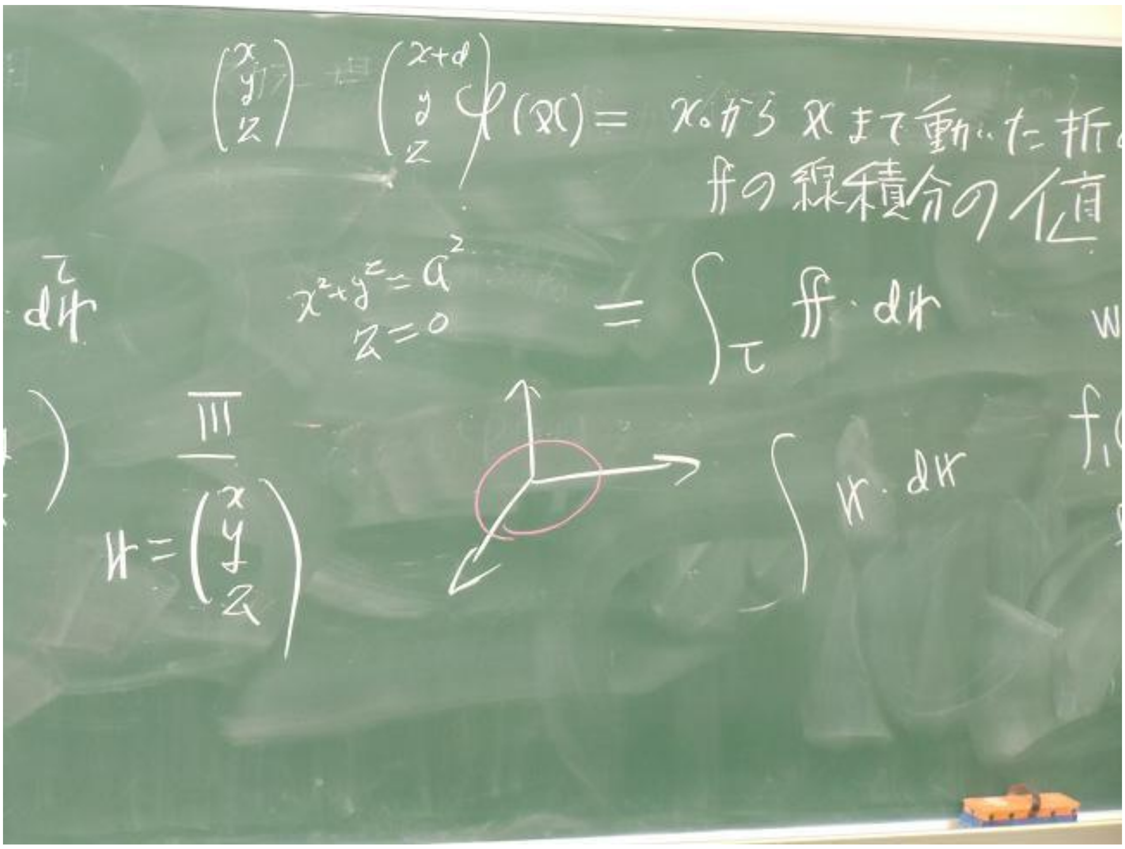
証明

左辺をtで微分

$$\underbrace{\frac{1}{2} m \{ v'(t) \cdot v(t) + v(t) \cdot v'(t) \}}_{m\, a(t) \cdot v(t)} + \underbrace{\varphi'(x(t))\,(x'(t))}_{(\mathrm{grad}\,\varphi) \cdot v(t)}$$



力の場 $\mathbb{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$
z
(1,1,1)
(0,0,0)
y
(1,0,0)
(1,1,0)
x
I
$\int \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$
II $\mathbb{F} = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ z \end{pmatrix}$
III
$\mathbb{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} x+d \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$\varphi(x) =$ x_0から xまで動いた折
$\mathbb{F}$の線積分の値
$x^2+y^2=a^2$
$z=0$
$= \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$
III
$\mathbb{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$\int \mathbb{r} \cdot d\mathbb{r}$