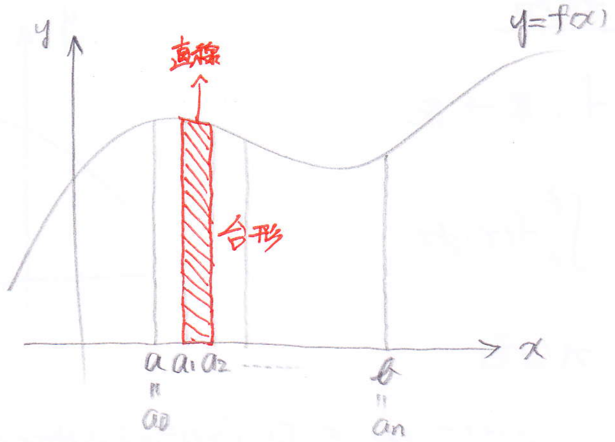
定積分

細かく $[a, b]$ を分割

$$d_i = a_{i+1} - a_i \in D$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\, d_i$$

定積分の定義



微積分学の基本定理

$F' = f \qquad F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(a_0)\, d_0 = F(a_1) - F(a_0)$ ($a_0 = a$)

⋮

$f(a_{i-1})\, d_{i-1} = F(a_{i-2}) - F(a_{i-1})$

$f(a_i)\, d_i = F(a_{i-1}) - F(a_i)$ ← 我々の微分の定義

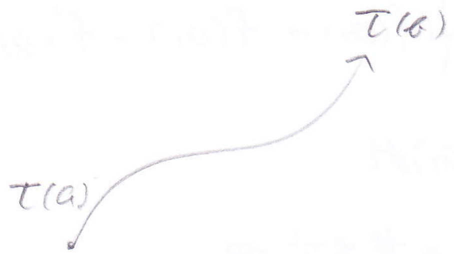
⋮

+) $f(a_{n-1})\, d_{n-1} = F(a_n) - F(a_{n-1})$ ($a_n = b$)

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\, d_i = F(b) - F(a)$$

空間 $\mathbb{R}^3$

曲線 $\tau : [a, b] \to \mathbb{R}$



ベクトル場

力の場

$\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

仕事

$\int_a^b \mathbb{F}(\tau(t))\, \tau'(t)\, dt = \int_\tau \mathbb{F}\, dt$ 　線積分（曲線に沿った積分）

$$\mathbb{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \qquad f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\mathbb{f} = f\mathbb{e}_1 + g\mathbb{e}_2 + h\mathbb{e}_3 \quad \text{(ベクトル場)}$$

$$\updownarrow$$

$$w = f\,dx + g\,dy + h\,dz \quad \text{1次の微分形式}$$

$$\int_\tau \mathbb{f}\, dt = \int_a^b w(\tau(t))(\tau'(t))\, dt$$

多変数の微分

スカラー場 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$　0次の微分形式

grad(ient) 勾配

$$d\varphi = \varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz \quad \text{1次の微分形式}$$

$$\mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3 ; \mathbb{R})$$

$$\updownarrow$$

ベクトル場

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbb{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbb{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbb{e}_3$$

$\tau[a, b] \to \mathbb{R}^3$　曲線

$(\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$

合成関数 $\varphi \cdot \tau : [a, b] \to \mathbb{R}$

原始関数

$$\int_\tau d\varphi = \int_a^b \varphi'(\tau(t))(\tau'(t))\, dt$$

$$= \varphi(\tau(b)) - \varphi(\tau(a))$$

$$= \int_\tau (\mathrm{grad}\,\varphi)\, dt$$

勾配 (gradient)

直観的

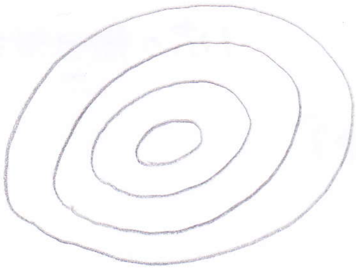
$\mathbb{R}^2$で考える(1つ次元をおとして)

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

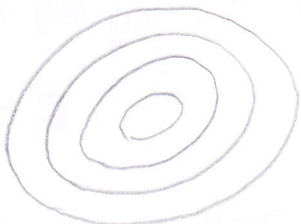
$$\varphi' = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

地図 山 (等高線)



台風 (等圧線)



$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \varphi(\tau(t+d)) - \varphi(\tau(t))$$

$$= \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\tau(t))\,\tau_1(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\tau(t))\,\tau_2(t) \right\} d$$

(τは等高線に沿って動いていると仮定すると…)

$$(\mathrm{grad}\,\varphi) \perp \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$$ 垂直

gradの計算

$$\varphi(x, y, z) = r^{\alpha} \qquad \alpha:\text{定数} \qquad r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathrm{grad}\,\varphi$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{e}_3$$

$$= \frac{\alpha}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\cdot 2x + \frac{\alpha}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\cdot 2y + \frac{\alpha}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\cdot 2z$$

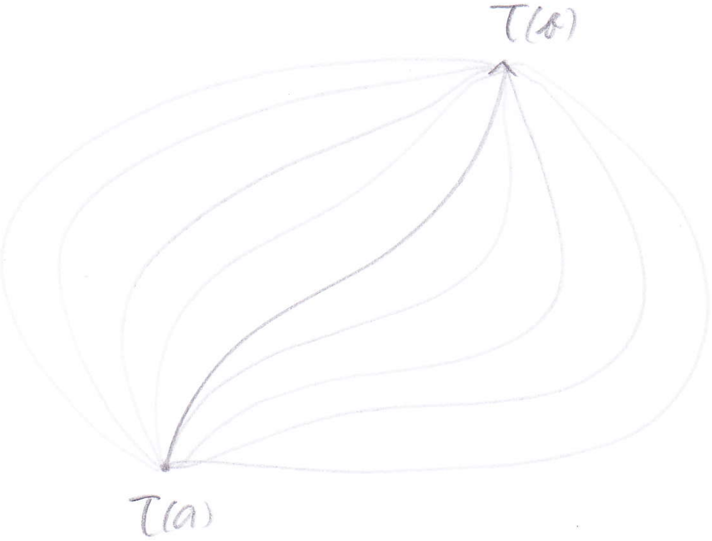
$$= \alpha r^{\alpha-2}\cdot x\,\mathbf{e}_1 + \alpha r^{\alpha-2}\cdot y\cdot \mathbf{e}_2 + \alpha r^{\alpha-2}\cdot z\,\mathbf{e}_3$$

特に$\alpha = -1$のとき

$$-r^{-2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

力の場

$\mathbf{f}$：力の場＝ベクトル場



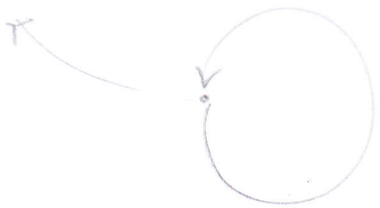
$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{f}$

$$\int_{\tau} \mathbf{f}\, d\tau$$

$$= \varphi(\tau(b)) - \varphi(\tau(a))$$

$$= 0$$



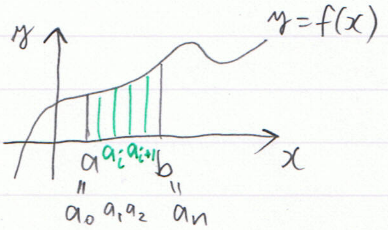
"保存力"

閉路

※ レポートなし

10/20(水) 3限 微積分(生物学類)

積分　1変数



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

細かく [a,b] を分割

$a_{i+1} - a_i \in D$　　差がDに含まれるくらい細かく分割

← するとここが直線になる

台形の面積 = (上底+下底)×高さ÷2

$= (f(a_i) + f(a_{i+1})) \times d \div 2$

$= (f(a_i) + f(a_i + d)) \times d \div 2$

$= (f(a_i) + f(a_i) + f'(a_i)d) \times d \div 2$

$= (2f(a_i)d + f'(a_i)d^2) \div 2$　（$d^2 = 0$）

$= f(a_i)d$

積分は台形の面積を足し合わせることに等しい

定積分の定義　$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)d_i$

微積分学の基本定理

$F' = f$　　$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(a_{i-1})d_{i-1} = F(a_i) - F(a_{i-1})$

$f(a_i)d_i = F(a_{i+1}) - F(a_i)$　← 我々の微分の定義

（$a_{i+1} = a_i + d_i$）

$f(a_{i+1})d_{i+1} = F(a_{i+2}) - F(a_{i+1})$

⋮

$f(a_{n-1})d_{n-1} = F(a_n) - F(a_{n-1})$　（$a_n = b$）

$+ \quad f(a_0)d_0 = F(a_1) - F(a_0)$　（$a_0 = a$）

全部足し合わせると　$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)d_i = F(b) - F(a)$

$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)d_i = \int_a^b f(a_i)d_i$

NO.

DATE

空間 $\mathbb{R}^3$

曲線

$\tau : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

ベクトル場 $\mathbb{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

力の場とする

動けば仕事が発生する

$$\int_a^b \mathbb{f}(\tau(t))\cdot(\tau'(t))\,dt \quad \cdots \text{ 線積分}$$

$$= \int_\tau \mathbb{f}\cdot d\tau \quad \leftarrow \text{一般表記}$$

$$\mathbb{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \qquad f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{f} = f\mathbb{e}_1 + g\mathbb{e}_2 + h\mathbb{e}_3 \quad \text{ベクトル場}$$

$$\updownarrow$$

$$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz \quad \text{1次の微分形式}$$

$$\int_a^b \omega(\tau(t))\cdot(\tau'(t))\,dt = \int_a^b \mathbb{f}(\tau(t))\cdot(\tau'(t))\,dt$$

多変数の微分

スカラー場 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$d\varphi = \varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \quad \text{1次の微分形式}$$

$$\mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$$

0次の微分形式

$$\updownarrow$$

演算 grad(ient) 勾配

ベクトル場 $\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbb{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbb{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbb{e}_3$

$\tau : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 曲線 $\quad \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad$ 合成関数 $\varphi\circ\tau : [a,b] \to \mathbb{R}$

原始関数

$$\int_\tau d\varphi = \int_a^b \varphi'(\tau(t))\cdot(\tau'(t))\,dt$$

$$= \varphi(\tau(b)) - \varphi(\tau(a)) \quad \leftarrow \text{微積分学の基本定理}$$

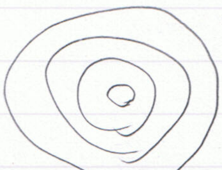
$$\shortparallel$$

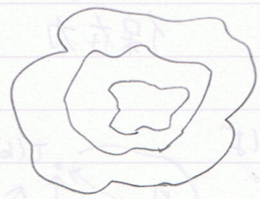
$$\int_\tau (\mathrm{grad}\,\varphi)\cdot d\tau$$

勾配(gradient)
↑
直観的

$\mathbb{R}^2$で考える
$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\varphi' = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$
$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$

台風　　　　地図


等圧線


等高線

$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \quad t \in [a, b]$
$\varphi(\tau(t+d)) - \varphi(\tau(t))$
$= \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\tau(t))\,\tau_1'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\tau(t))\,\tau_2'(t) \right\} d$　　微分の式

τは等高線に沿って動いているとする
$(\mathrm{grad}\,\varphi) \perp \begin{pmatrix} \tau_1' \\ \tau_2' \end{pmatrix}$
↑
直交

等高線に直交して動くと一番値の変化が大きい
高さでいうと、より長いベクトル＝より急勾配 ⇒ 勾配(gradient)

gradの計算　　αは実数、$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\varphi(x, y, z) = r^\alpha$

$\mathrm{grad}\,\varphi = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}$の微分
$= \frac{\alpha}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot 2x\, e_1 + \frac{\alpha}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot 2y\, e_2 + \frac{\alpha}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot 2z\, e_3$
$= \frac{\alpha}{2} \cdot 2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}(x e_1 + y e_2 + z e_3)$
$= \alpha (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$= \alpha r^{\alpha-2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

特に $\alpha=-1$ $\quad \mathbb{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

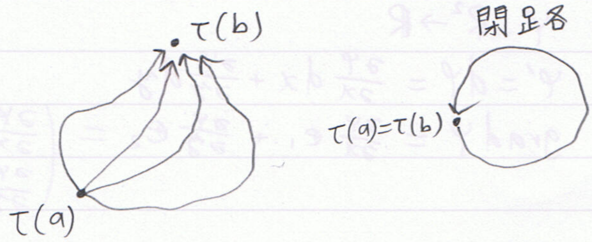
$$r^{-3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathbb{r}}{r}$$

$\mathbb{f}$: 力の場 = ベクトル場

$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

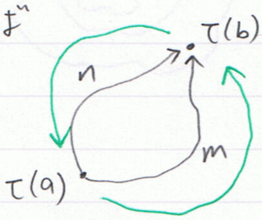
$\mathrm{grad}.\varphi=\mathbb{f}$

曲線

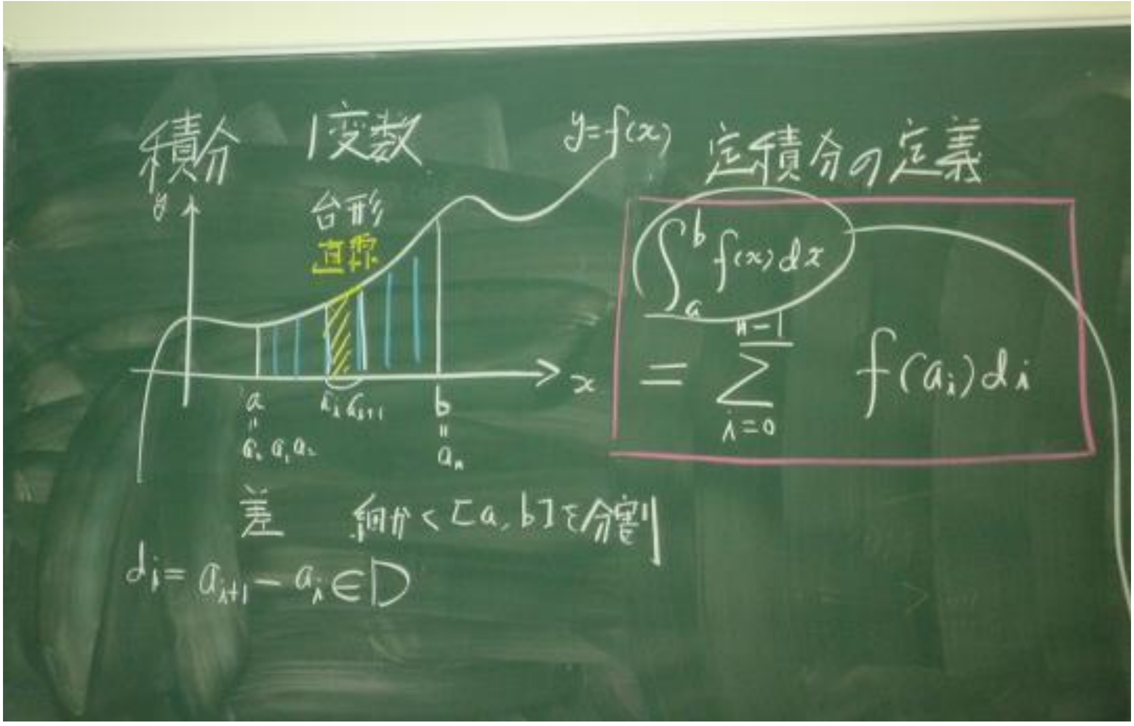


$$\int_\tau \mathbb{f}\cdot d\tau=\varphi(\tau(b))-\varphi(\tau(a))$$
$$=0$$ 保存力

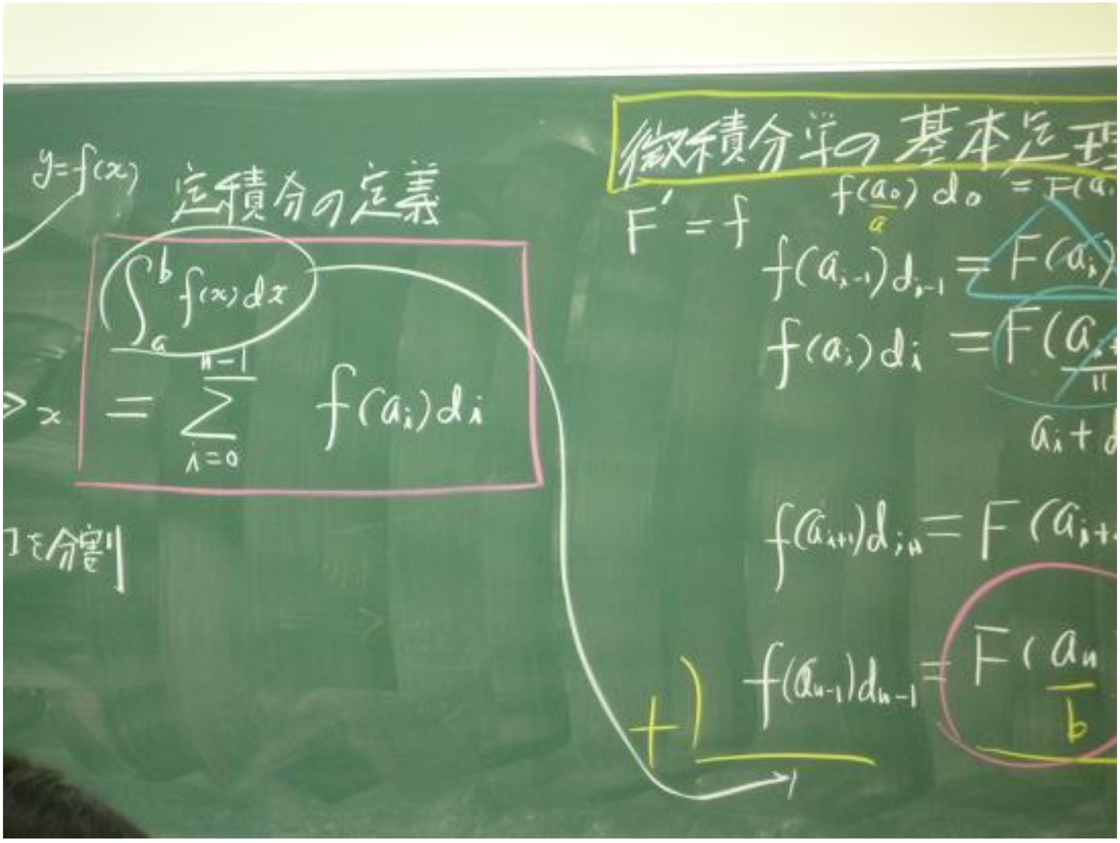
保存力が成り立てば



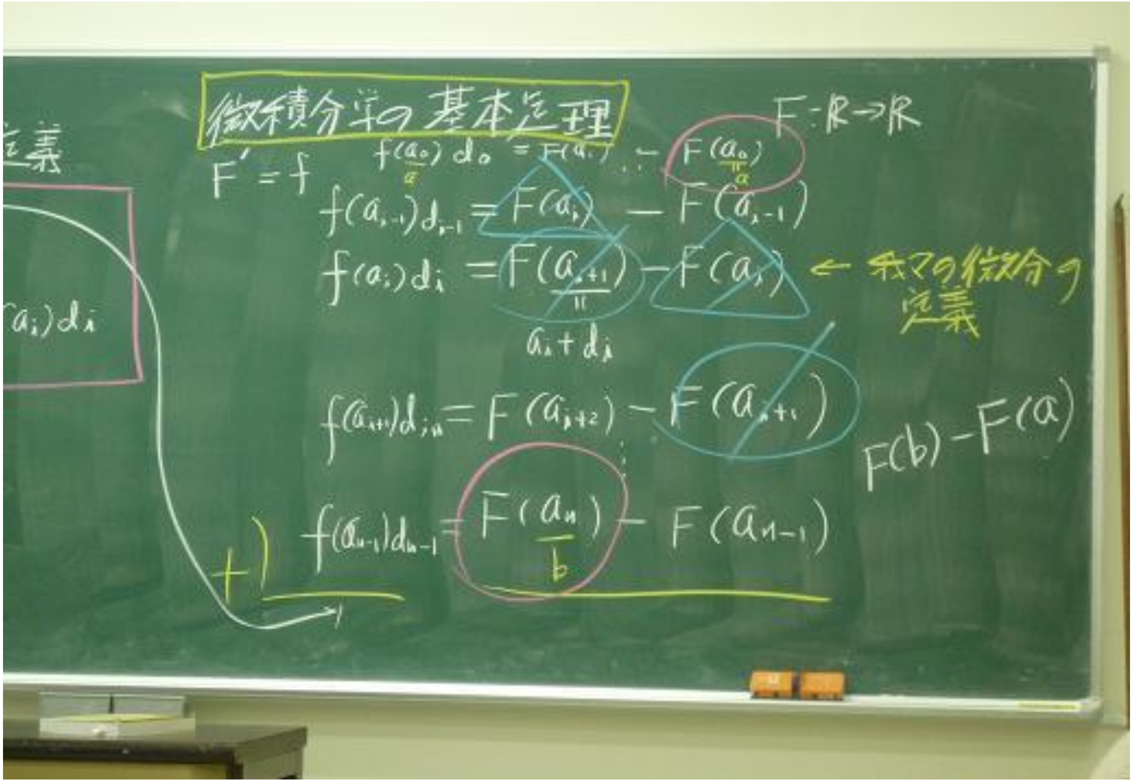
mとnの逆を合わせれば閉路となり0

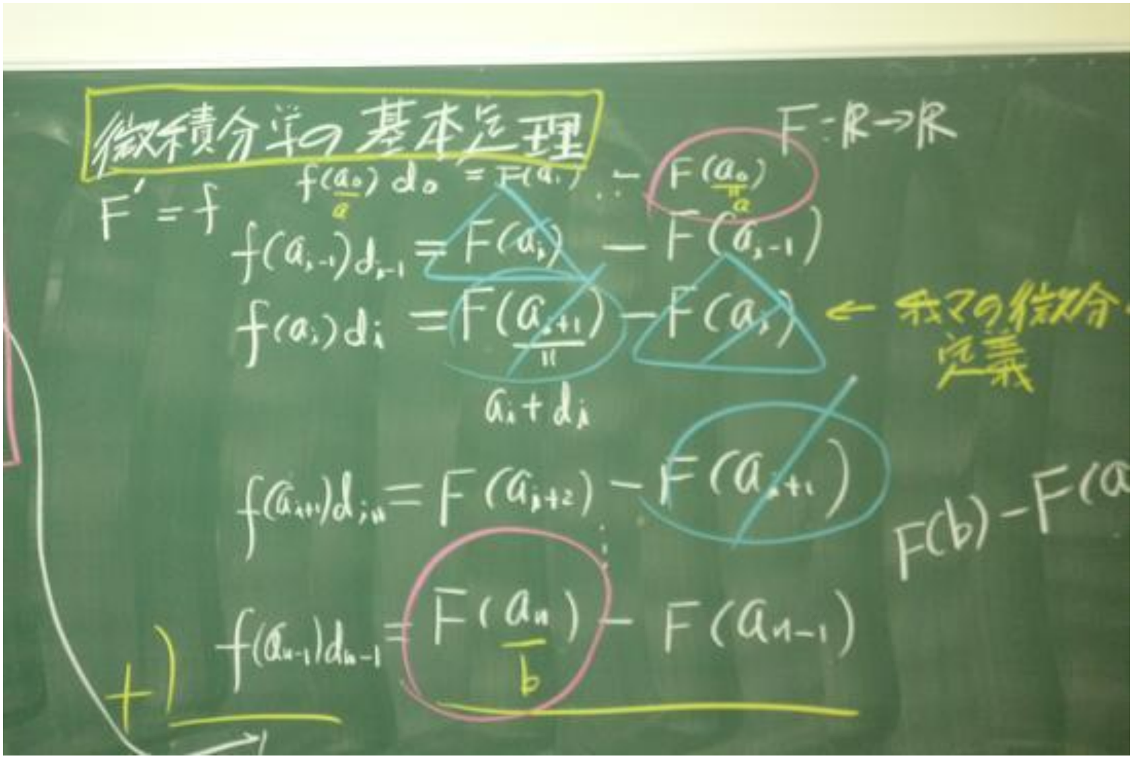


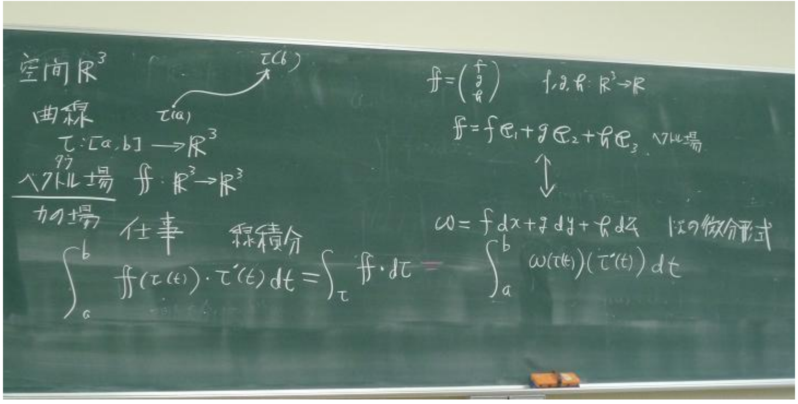
積分 1変数
y=f(x)
定積分の定義
台形
近似
∫_a^b f(x)dx
= Σ_{i=0}^{n-1} f(a_i)d_i
差 細かく[a, b]を分割
d_i = a_{i+1} − a_i ∈ D



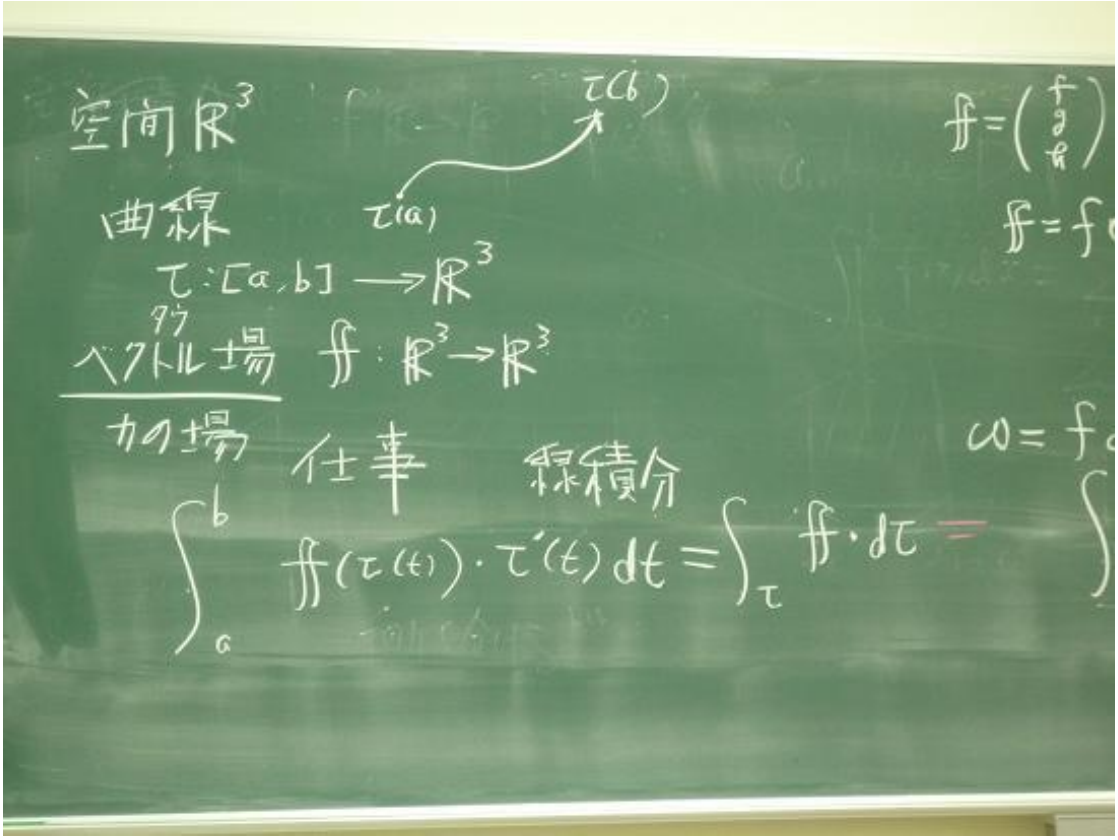
y=f(x)
定積分の定義
∫_a^b f(x)dx
= Σ_{i=0}^{n-1} f(a_i)d_i
]を分割
微積分学の基本定理
F′ = f
f(a_0) d_0
f(a_{i-1})d_{i-1} = F(a_i)
f(a_i)d_i = F(a
f(a_{i+1})d_{i+1} = F(a_{i+
f(a_{n-1})d_{n-1} = F(a_n
+)


微積分学の基本定理
F:R→R
F′=f
f(a0)d0 = F(a1) − F(a0)
f(ai-1)di-1 = F(ai) − F(ai-1)
f(ai)di = F(ai+1) − F(ai)
← 我々の微分の定義
ai + di
f(ai+1)di+1 = F(ai+2) − F(ai+1)
F(b) − F(a)
f(an-1)dn-1 = F(an) − F(an-1)
+)

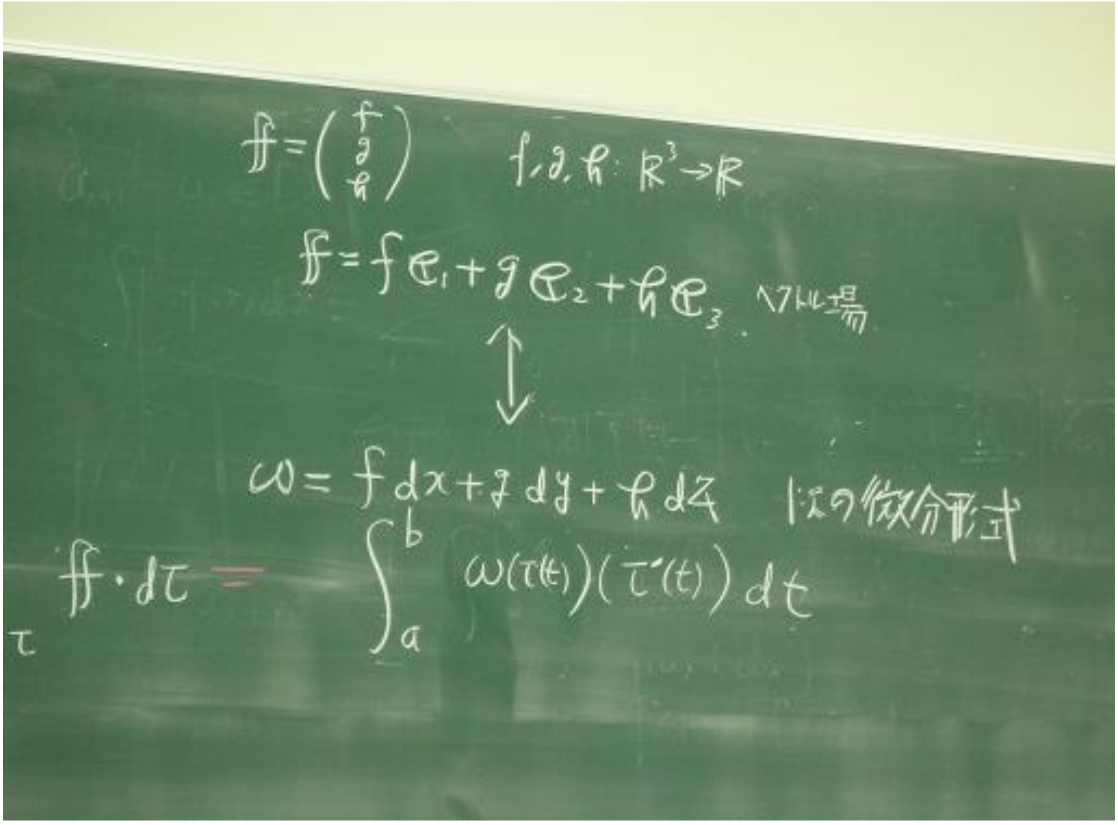

微積分学の基本定理
F:R→R
F′=f
f(a0)d0 = F(a1) − F(a0)
f(ai-1)di-1 = F(ai) − F(ai-1)
f(ai)di = F(ai+1) − F(ai)
ai + di
f(ai+1)di+1 = F(ai+2) − F(ai+1)
f(an-1)dn-1 = F(an) − F(an-1)
+)

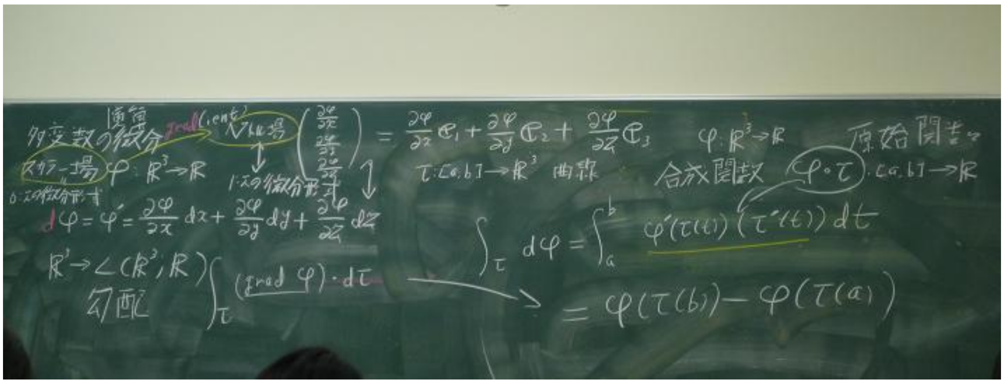


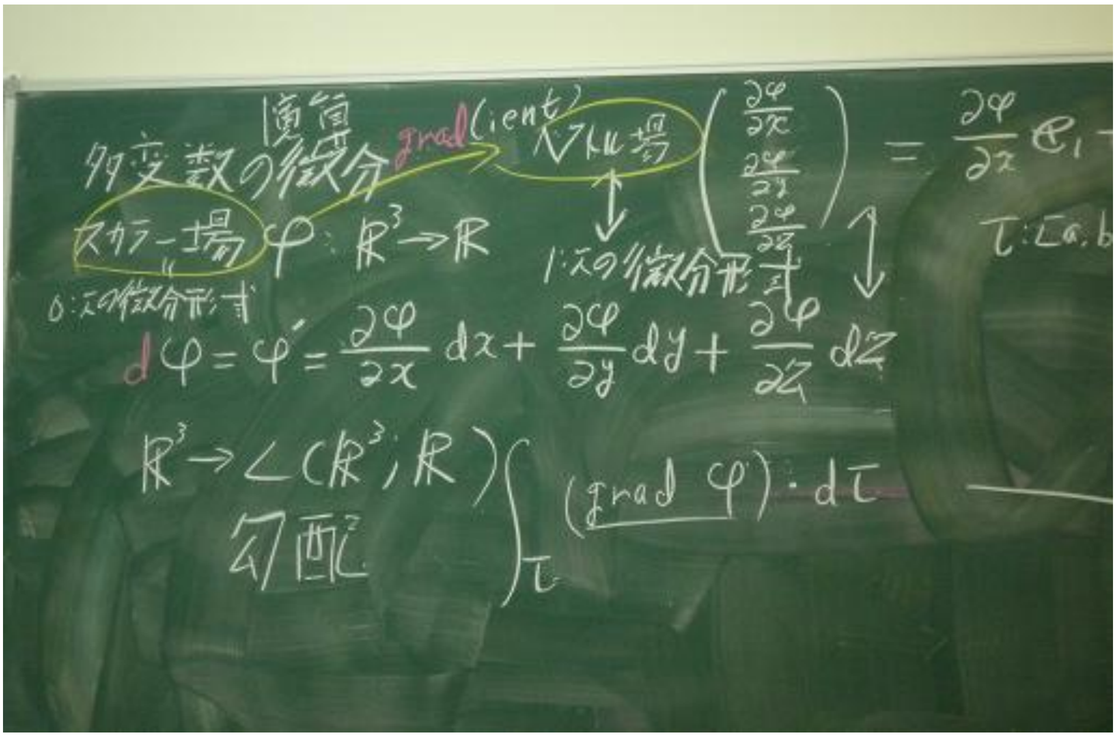
空間 $\mathbb{R}^3$
$\tau(b)$
曲線 $\tau(a)$
$\tau : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
タウ
ベクトル場 $\mathbb{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
力の場
仕事 線積分
$\int_a^b \mathbb{f}(\tau(t)) \cdot \tau'(t)\, dt = \int_\tau \mathbb{f} \cdot d\tau = \int_a^b \omega(\tau(t))(\tau'(t))\, dt$
$\mathbb{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$ $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$\mathbb{f} = f\mathbb{e}_1 + g\mathbb{e}_2 + h\mathbb{e}_3$ ベクトル場
$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ 1次の微分形式

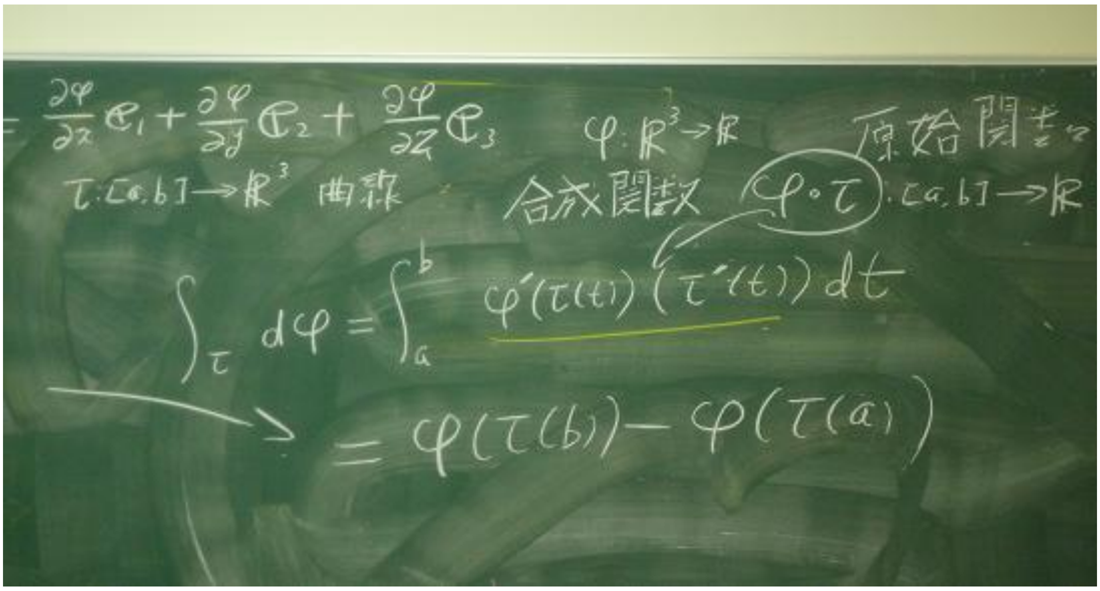


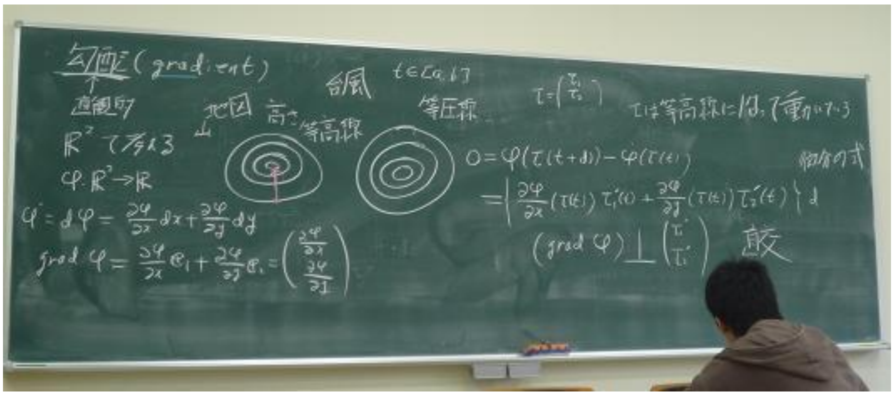
空間 $\mathbb{R}^3$
$\tau(b)$
曲線 $\tau(a)$
$\tau : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
タウ
ベクトル場 $\mathbb{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
力の場
仕事 線積分
$\int_a^b \mathbb{f}(\tau(t)) \cdot \tau'(t)\, dt = \int_\tau \mathbb{f} \cdot d\tau =$
$\mathbb{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$


f = (f, g, h)   f, g, h : R³ → R
f = f e₁ + g e₂ + h e₃ ベクトル場
ω = f dx + g dy + h dz 1次の微分形式
∫τ f · dτ = ∫a^b ω(τ(t))(τ′(t)) dt

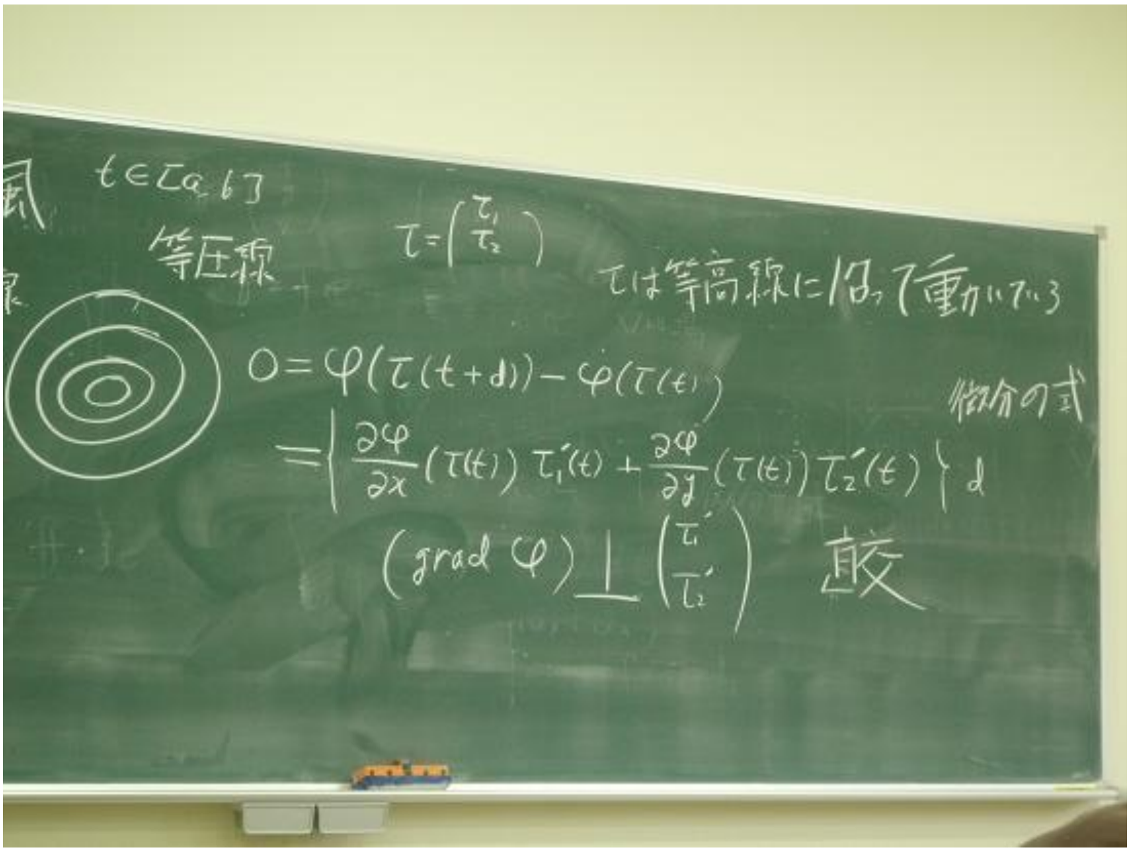

多変数の微分
ベクトル場
スカラー場 φ : R³ → R
1次の微分形式
τ : [a, b] → R³ 曲線
合成関数 φ∘τ : [a, b] → R
原始関数
勾配
= φ(τ(b)) − φ(τ(a))

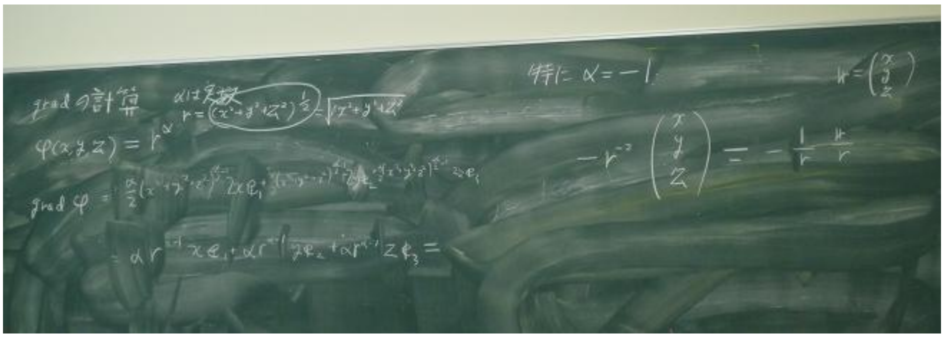

適当
多変数の微分
grad(ient)
ベクトル場
スカラー場 φ : R³ → R
0次の微分形式
1次の微分形式
dφ = φ' = ∂φ/∂x dx + ∂φ/∂y dy + ∂φ/∂z dz
R³ → L(R³; R)
勾配
∫τ (grad φ) · dτ
= ∂φ/∂x e₁
τ : [a, b

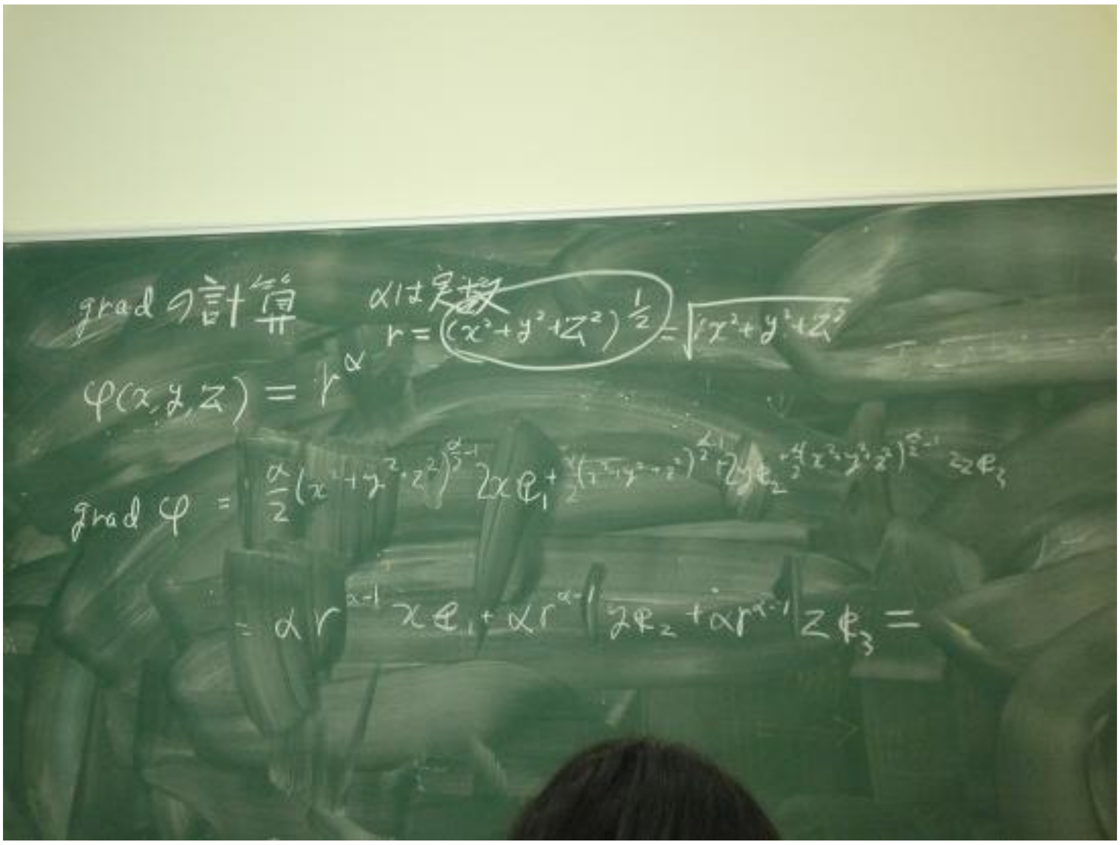

= ∂φ/∂x e₁ + ∂φ/∂y e₂ + ∂φ/∂z e₃
φ : R³ → R
原始関数
τ : [a, b] → R³ 曲線
合成関数 φ∘τ : [a, b] → R
∫τ dφ = ∫a^b φ'(τ(t)) (τ'(t)) dt
= φ(τ(b)) − φ(τ(a))

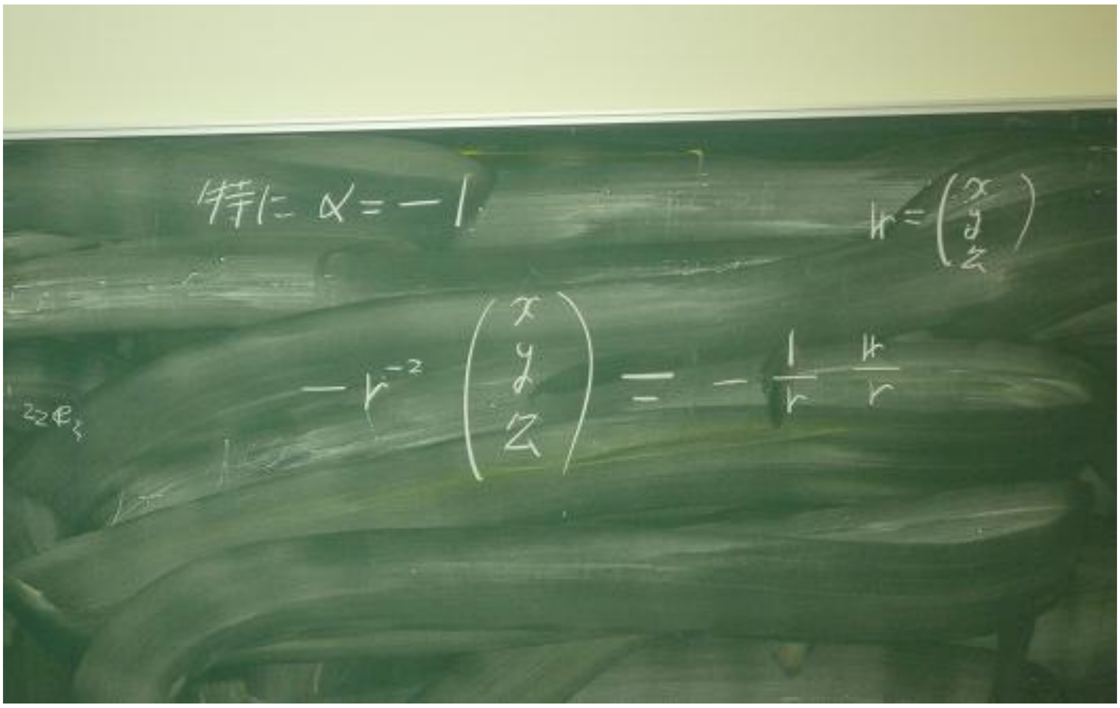

勾配(gradient)
直観的
R² で考える
φ: R² → R
地図
山
高さ
等高線
台風
等圧線
t ∈ [a, b]
τ は等高線に沿って動いている
O = φ(τ(t+d)) − φ(τ(t))
grad φ = ∂φ/∂x e₁ + ∂φ/∂y e₂ = (∂φ/∂x, ∂φ/∂y)
(grad φ) ⊥ (τ₁′, τ₂′)
故

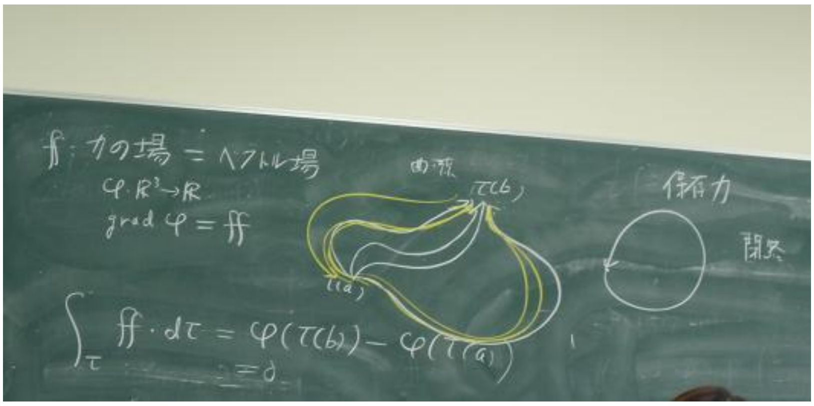

勾配(gradient)
直観的
R² で考える
φ: R² → R
地図
山
高さ
等高線
台風
等圧線
t ∈ [a, b]
φ′ = dφ = ∂φ/∂x dx + ∂φ/∂y dy
grad φ = ∂φ/∂x e₁ + ∂φ/∂y e₂ = (∂φ/∂x, ∂φ/∂y)

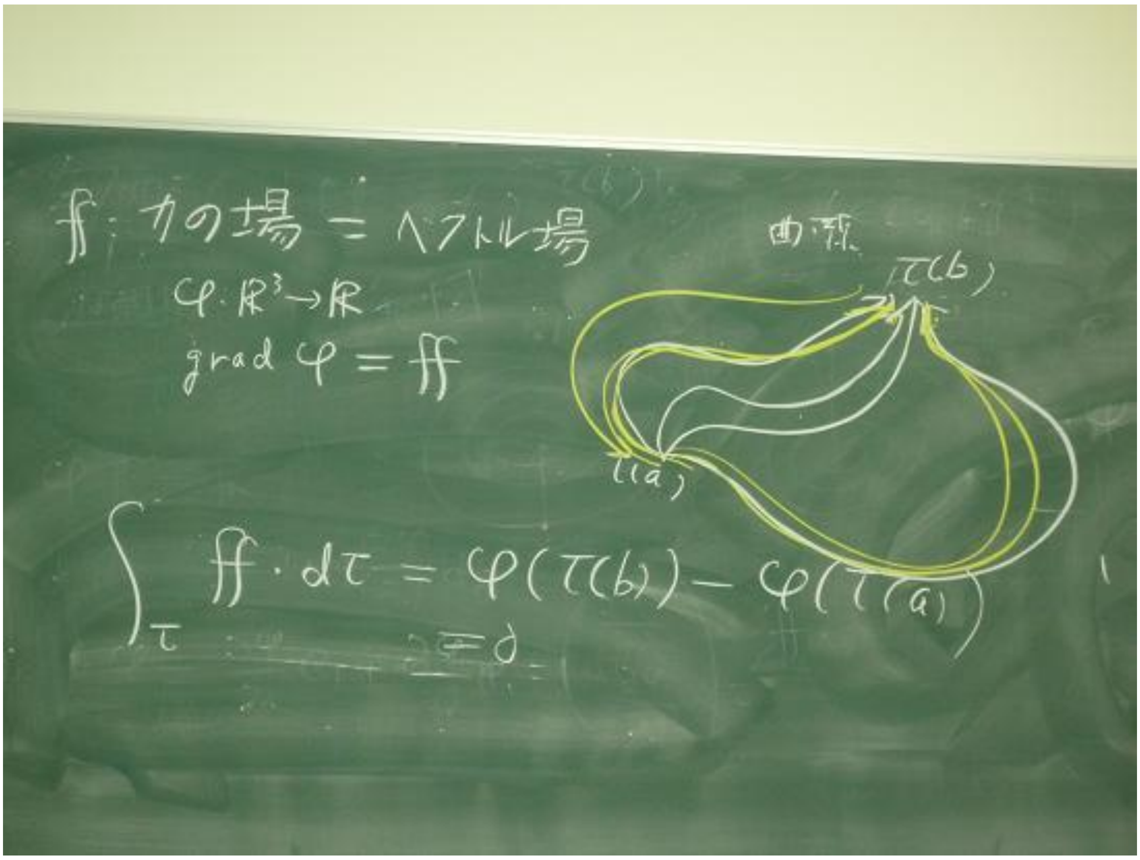

t∈[a,b]
等圧線
τ=(τ1, τ2)
τは等高線に沿って動いている
0=φ(τ(t+d))−φ(τ(t))
微分の式
={∂φ/∂x (τ(t)) τ1′(t) + ∂φ/∂y (τ(t)) τ2′(t)} d
(grad φ) ⊥ (τ1′, τ2′)

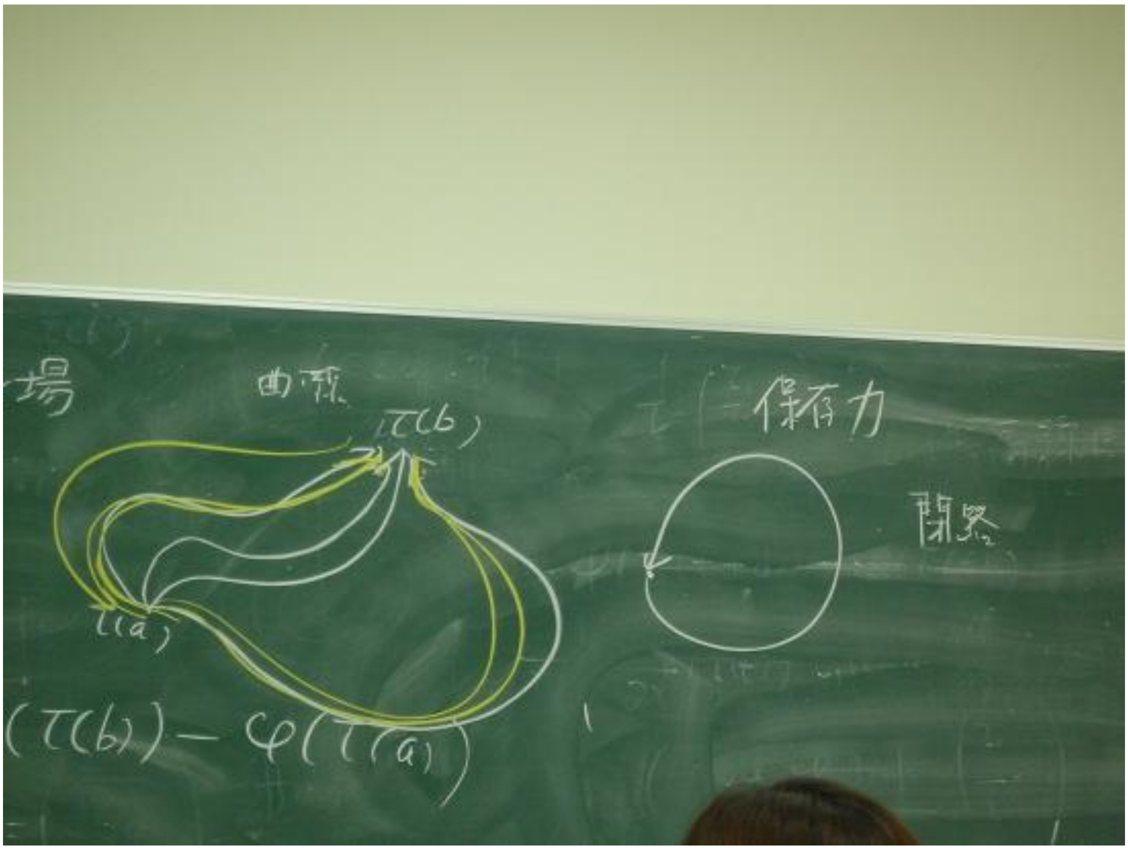

gradの計算
φ(x,y,z) = r^α
特に α = −1


gradの計算
αは実数
r = (x²+y²+z²)^½ = √(x²+y²+z²)
φ(x, y, z) = r^α
grad φ =
= αr^(α-1) x e₁ + αr^(α-1) y e₂ + αr^(α-1) z e₃ =


特に α = −1
r = (x, y, z)
−r^(−2) (x, y, z) = −1/r r/r


ff : 力の場 = ベクトル場
φ : R³ → R
grad φ = ff
τ(b)
τ(a)
保存力
∫τ ff · dτ = φ(τ(b)) − φ(τ(a))


ff : 力の場 = ベクトル場
φ : R³ → R
grad φ = ff
τ(b)
τ(a)
∫τ ff · dτ = φ(τ(b)) − φ(τ(a))


場
τ(b)
τ(a)
保存力
(τ(b)) − φ(τ(a))