ベクトル解析

platonicな立場 → 空間の各点にベクトルを対応させる

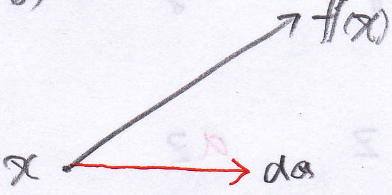
力の場
流れの場 } ベクトル場

pragmaticな立場（自然科学の立場）

どのように計測するか？ → 空間の各点に$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$の線型関数を対応させる

1次の微分形式

(力の場)

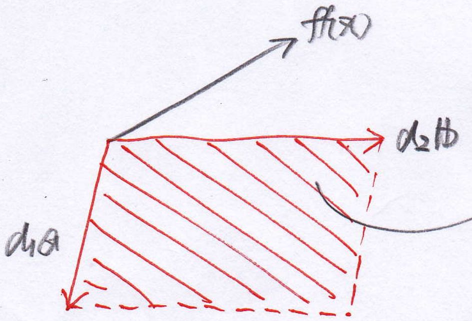


仕事 $f(x)\cdot(da) = (f(x)\cdot a)\cdot d$

$a \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(x)\cdot a \in \mathbb{R}$

線型関数(主役)

(流れの場)



この升を単位時間にどれだけの量が横切るか？

↓

（横切った水に色をつけるとき その体積は…）

$d_1a,\ d_2b,\ f(x)$ではられる平行六面体の体積

$f(x)\,(d_1a \times d_2b) = f(x)\cdot(a\times b)\ d_1d_2$

$(a\times b) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \mapsto f(x)\,(a\times b) \in \mathbb{R}$

2次の交代形式 { 2重線型
反対称

空間の各点に2次の交代形式を対応させる

2次の微分形式

$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}$ への線型写像の全体 $L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$

$\mathbb{R}^3$：標準基底

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \quad (\text{一意的})$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \longmapsto \underbrace{(a_1\ a_2\ a_3)}_{\text{1×3 行列で表せる!!}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}$$

$$(1,0,0)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto x \qquad dx$$

$\left(\dfrac{dy}{dx} の d\right)$

$$(0,1,0)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto y \qquad dy$$

$$(0,0,1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto z \qquad dz$$

$\Rightarrow L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}) \rightsquigarrow a_1dx + a_2dy + a_3dz$ （一意的にかける）

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x\in\mathbb{R}^3)$

$\varphi'(x) = d\varphi(x) \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$

$$\varphi'(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x)dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x)dz$$

$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.　2次の交代形式 $\begin{cases} \text{2重線型} \cdots ① \\ \text{交代} \cdots ② \end{cases}$

$$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3$$

$$\mathbb{b} \in \mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2 + b_3\mathbb{e}_3$$

$$f(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = f(a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3,\ b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2 + b_3\mathbb{e}_3) \quad ①$$

$$= a_1b_1 \underbrace{f(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_1)}_{=0} + a_1b_2 f(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2) + a_1b_3 f(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_3)$$

$$+ a_2b_1 f(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_1) + a_2b_2 \underbrace{f(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_2)}_{=0} + a_2b_3 f(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3)$$

$$+ a_3b_1 f(\mathbb{e}_3, \mathbb{e}_1) + a_3b_1 f(\mathbb{e}_3, \mathbb{e}_1) + a_3b_3 \underbrace{f(\mathbb{e}_3, \mathbb{e}_3)}_{=0}$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1) f(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)$$

$$+ (a_2b_3 - a_3b_2) f(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3)$$

$$+ (a_3b_1 - a_1b_3) f(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_3) \quad ②$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$dx \wedge dy$

$$〃 \longmapsto a_2b_3 - a_3b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$dy \wedge dz$

$$〃 \longmapsto a_3b_1 - a_1b_3 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$dz \wedge dx$

$$f = f(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3)\underline{(dy \wedge dz)} + f(\mathbb{e}_3, \mathbb{e}_1)\underline{(dz \wedge dx)} + f(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)\underline{(dx \wedge dy)}$$

$\downarrow$

2次の交代形式の全体のつくる線型空間の標準基底.

3次の交代形式 ― 線型写像

これは1次元

$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$

$\begin{cases} \text{三重線型} \\ \text{交代} \end{cases}$

$f(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$

$$\left(\begin{aligned} \mathbb{a} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3 \\ \mathbb{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2 + b_3\mathbb{e}_3 \\ \mathbb{c} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1\mathbb{e}_1 + c_2\mathbb{e}_2 + c_3\mathbb{e}_3 \end{aligned}\right)$$

$$= f(a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3,\ b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2 + b_3\mathbb{e}_3,\ c_1\mathbb{e}_1 + c_2\mathbb{e}_2 + c_3\mathbb{e}_3)$$

$$= a_1b_1c_1 \underbrace{f(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_1, \mathbb{e}_1)}_{=0} + \cdots\cdots$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} f(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3)}_{\text{1次元}}$$

レポート問題2.（これを示せ）

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$dx \wedge dy \wedge dz$

(レポート問題Ⅱ)

$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ （4次の交代形） $f = 0$ (0次) を証明せよ.

空間の各点にn次の交代形式を対応させる.

$$\begin{tikzcd}
\text{スカラー場} \arrow[r, "\substack{\text{勾配}\\ \text{grand(ient)}}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{ベクトル場} \arrow[r, "\substack{\text{回転}\\ \text{rot(atim)}}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{ベクトル場} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{0次の微分形式} & \text{1次の微分形式} & \text{2次の微分形式}
\end{tikzcd}$$

$f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x)e_1 + g(x)e_2 + h(x)e_3$

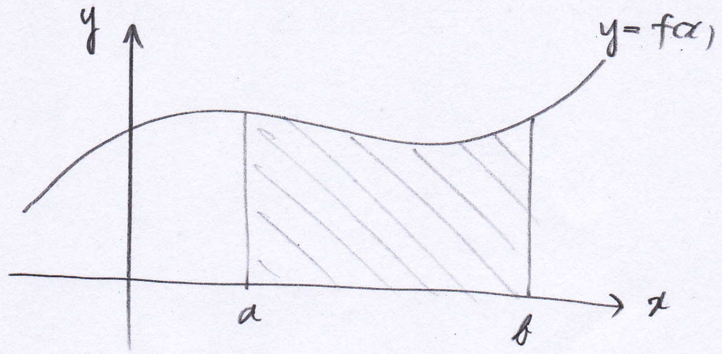
$\updownarrow$ div 発散 (divergence)

$f(x)\,dx + g(x)\,dy + h(x)\,dz$

$f(x)\,dy \wedge dz + g(x)\,dz \wedge dx + h(x)\,dx \wedge dy$

$$\begin{tikzcd}
\text{スカラー場} \arrow[d, leftrightarrow] & \varphi \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{3次の微分形式} & \varphi\, dx \wedge dy \wedge dz
\end{tikzcd}$$

定積分



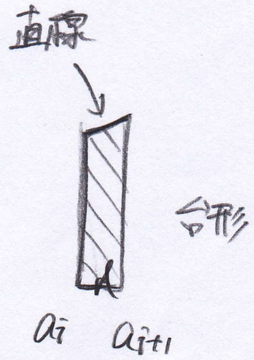
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

n分割

$a_{i+1} - a_i \in D$ (となるくらい小さく分ける)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx$$



(間隔が非常に小さくなると… Kock-Lawvere の公理から)

(台形の面積)

$$= \frac{1}{2}\left\{(\text{上底}+\text{下底}) \times \text{高さ}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(f(a_i) + f(a_{i+1}))\, d_i\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(f(a_i) + f(a_i + d_i))\, d_i\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(f(a_i) + f(a_i) + f'(a_i)\underline{d_i})\,\underline{d_i}\right\}$$

ゼロ

$$= f(a_i)\, d_i$$

微積分学の基本定理

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$$\shortparallel$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}$$ (以降未定….)

10/13(水)　　微積分(生物学類)

古典的

ベクトル解析

力の場　　＞ ベクトル場 … 空間の各点にベクトルを対応させる

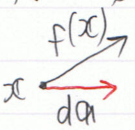
流れの場　　(platonic な立場)

pragmatic な立場

どのように計測するか?

力の場 … 空間の各点に $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}$ への線型関数を対応させる

1次の微分形式



$d \in D$

動かして仕事を計測する

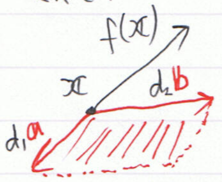
$$f(x)\cdot(da) = (f(x)\cdot a)d$$

$$\underset{\mathbb{R}^3}{\overset{\cap}{a}} \longmapsto \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{f(x)\cdot a}}$$

線型関数(主役)

流れの場

マスを作る



$d_1, d_2 \in D$

このマス(升)を単位時間にどれだけの量が横切るか?

$d_1 a$, $d_2 b$, $f(x)$ で張られる平行六面体の体積を計算する

$$f(x)\cdot(d_1 a \times d_2 b) = (f(x)\cdot(a\times b))d_1 d_2$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longmapsto f(x)\cdot(a\times b) \in \mathbb{R}$$

2重線型

交代(反対称)

空間の各点に2次の交代形式を対応させる

2次の微分形式

2次の交代形式

再発見　$a = e_1$, $b = e_2$ とおくと

$e_1 \times e_2 = e_3$

$f(x)\cdot e_3$ は $f(x)$ の z 成分

$\mathbb{R}^3$からRへの線型写像の全体

$L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$

$\mathbb{R}^3$ 標準基底 $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ と一意的に書ける

$$\underset{\in \mathbb{R}^3}{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}} \longmapsto \underset{\in\mathbb{R}}{\underbrace{(a_1, a_2, a_3)}_{1\times 3\text{の行列で表せる}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}$$

$\frac{dy}{dx}$という意味でのd

$(1,0,0)$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto x$ dx

$(0,1,0)$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto y$ dy

$(0,0,1)$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto z$ dz

$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$ と一意的に書ける

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 一般の関数

$x \in \mathbb{R}^3$

$\varphi'(x) = d\varphi(x) \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$

$$\varphi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x)\,dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x)\,dz$$

$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 2次の交代形式
$\begin{cases}\text{2重線型}\\ \text{交代(反対称)}\end{cases}$

$a \in \mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, $b \in \mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$, $c \in \mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$

$$f(\mathbb{a},\mathbb{b}) = f(a_1\mathbb{e}_1+a_2\mathbb{e}_2+a_3\mathbb{e}_3,\ b_1\mathbb{e}_1+b_2\mathbb{e}_2+b_3\mathbb{e}_3)$$

$$= a_1b_1\underbrace{f(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1)}_{0} + a_2b_2\underbrace{f(\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_2)}_{0} + a_3b_3\underbrace{f(\mathbb{e}_3,\mathbb{e}_3)}_{0}$$

$$\underbrace{+a_1b_2f(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2)+a_2b_1f(\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_1)}_{(a_1b_2-a_2b_1)f(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2)}$$

反対称なので

$f(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1)=-f(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1)$

$2f(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1)=0$

$f(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1)=0$

同様に $+(a_2b_3-a_3b_2)f(\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_3)$

$+(a_3b_1-a_1b_3)f(\mathbb{e}_3,\mathbb{e}_1)$

反対称

$f(\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_1)=-f(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2)$

$$\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right) \to a_1b_2-a_2b_1 = \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} \quad dx\wedge dy$$

$$\to a_2b_3-a_3b_2 = \begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} \quad dy\wedge dz$$

$$\to a_3b_1-a_1b_3 = \begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix} \quad dz\wedge dx$$

$\wedge$…くさび形 wedge

$$f = f(\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_3)(dy\wedge dz) + f(\mathbb{e}_3,\mathbb{e}_1)(dz\wedge dx) + f(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2)(dx\wedge dy)$$

2次の交代形式の全体の作る線型空間の基底

3次の交代形式

$f: \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 　{3重線型, 交代(反対称)}

$f(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})$

$\mathbb{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = a_1\mathbb{e}_1+a_2\mathbb{e}_2+a_3\mathbb{e}_3$

$\mathbb{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = b_1\mathbb{e}_1+b_2\mathbb{e}_2+b_3\mathbb{e}_3$

$\mathbb{c} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = c_1\mathbb{e}_1+c_2\mathbb{e}_2+c_3\mathbb{e}_3$

$$f(a,b,c)=f(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3,\ b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3,\ c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3)$$

$$\left|\begin{array}{l} a_1b_1c_1\,\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\underline{f(e_1,e_1,e_1)}}} \\ a_1b_2c_2\,\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\underline{f(e_1,e_2,e_2)}}} \\ f(e_1,e_2,e_3)=-f(e_2,e_1,e_3) \end{array}\right.$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} f(e_1,e_2,e_3)$$

レポートⅠ 過程を省かずに計算

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right) \longrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad dx\wedge dy\wedge dz$$

1次元

レポートⅡ $f: \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ｛4重線型 ／ 交代(反対称)

のとき、$f=0$ を証明せよ。

空間の各点にn次の交代形式を対応させる …n次の微分形式

スカラー場 ↕ 0次の微分形式	$\xrightarrow{\text{grad(ient) 勾配}}$	ベクトル場 ↕ 1次の微分形式	$f,g,h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $f(x)=f(x)e_1+g(x)e_2+h(x)e_3$ ↕ $f(x)dx+g(x)dy+h(x)dz$

↓ rot(ation) 回転

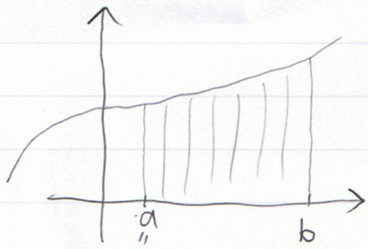
ベクトル場 ↕ 2次の微分形式	$f(x)e_1+g(x)e_2+h(x)e_3$ ↕ $f(x)dy\wedge dz+g(x)dz\wedge dx+h(x)dx\wedge dy$

↓ div(ergence) 発散

スカラー場 ↕ 3次の微分形式	φ ↕ $\varphi\, dx\wedge dy\wedge dz$

定積分　$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\int_a^b f(x)dx$



細かく分ける　　$a_{i+1} - a_i \in D$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$$

Kock-Lawvereの公理により、それぞれの帯の幅は $d \in D$ なので

それぞれの帯は台形

面積 $= \frac{1}{2}\{(上底+下底) \times 高さ\}$

$$\frac{1}{2}\left\{\left(f(a_i) + \underbrace{f(a_{i+1})}_{f(a_i+d_i)}\right) d_i\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(f(a_i) + f(a_i) + f'(a_i)\underbrace{d_i\right) d_i}_{(d_i)^2=0}\right\}$$
$$= f(a_i)d_i$$

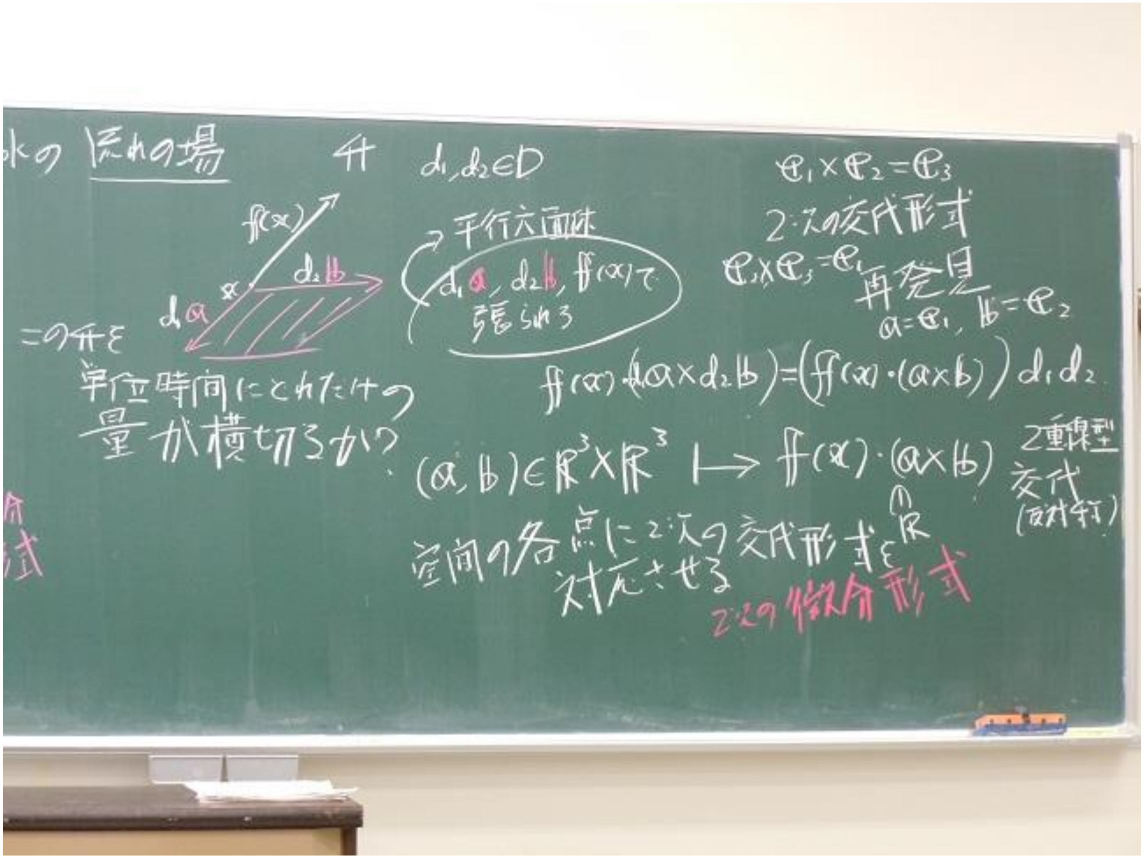
微積分学の基本定理

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f'$$


古典的ベクトル解析
力の場
流れの場
> ベクトル場
(platonicな立場)
— 空間の各点に ベクトルを対応させる
水の 流れの場
pragmaticな立場
どのように計測するか？
$f(x)$
$d\in D$
仕事
$d\alpha$
$f(x)\cdot(d\alpha)=(f(x)\cdot\alpha)d$
$\alpha\mapsto f(x)\cdot\alpha$
$\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}$
線型関数
(主役)
— 空間の各点に $\mathbb{R}^3$から$\mathbb{R}$への 線型関数を 対応させる
1次の微分形式
この弁を
単位時間
量が横

水の 流れの場
弁
$d_1,d_2\in D$
$e_1\times e_2=e_3$
2次の交代形式
$e_2\times e_3=e_1$ 再発見
$a=e_1,\ b=e_2$
$f(x)$
平行六面体
$d_1a,\ d_2b,\ f(x)$で張られる
この弁を
単位時間にどれだけの
量が横切るか？
$f(x)\cdot(d_1a\times d_2b)=(f(x)\cdot(a\times b))d_1d_2$
$(a,b)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\mapsto f(x)\cdot(a\times b)\in\mathbb{R}$
2重線型
交代
(反対称)
空間の各点に2次の交代形式を対応させる
2次の微分形式

$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}$ への線型写像の全体

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$

$\mathbb{R}^3$ 標準基底

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

(一意的)

1×3の行列で表わせる

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}$

$(1, 0, 0)$

$(0, 1, 0)$

$(0, 0, 1)$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto x$ $\quad dx$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto y$ $\quad dy$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \to z$ $\quad dz$

$$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$$

(一意的)

$\dfrac{dy}{dx}$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 一般の関数

$\dfrac{dy}{dx}$ $\quad x \in \mathbb{R}^3$

$$\varphi'(x) = d\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$$

$$\varphi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x)\,dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x)\,dz$$

$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$　　2次の交代形式

$\begin{cases} \text{2重線型} \\ \text{交代} \end{cases}$

$a \in \mathbb{R}^3$

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$

$b \in \mathbb{R}^3$

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$

$f(e_1, e_2) = -f(e_2, e_1)$

$f(e_1, e_1) = -f(e_1, e_1)$

$2f(e_1, e_1) = 0$

3個は消える　$3 \times 3 = 9$

$f(a, b) = f(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,\ b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)$

$= a_1 b_1 \underline{f(e_1, e_1)}$ （$= 0$）

$a_1 b_2 f(e_1, e_2) + a_2 b_1 f(e_2, e_1)$

$(a_1 b_2 - a_2 b_1) f(e_1, e_2)$

$+ (a_2 b_3 - a_3 b_2) f(e_2, e_3)$

$+ (a_3 b_1 - a_1 b_3) f(e_3, e_1)$

$f = f(e_2, e_3)(dy \wedge dz) + f(e_3, e_1)\, dz \wedge dx$

$+ f(e_1, e_2)\, dx \wedge dy$

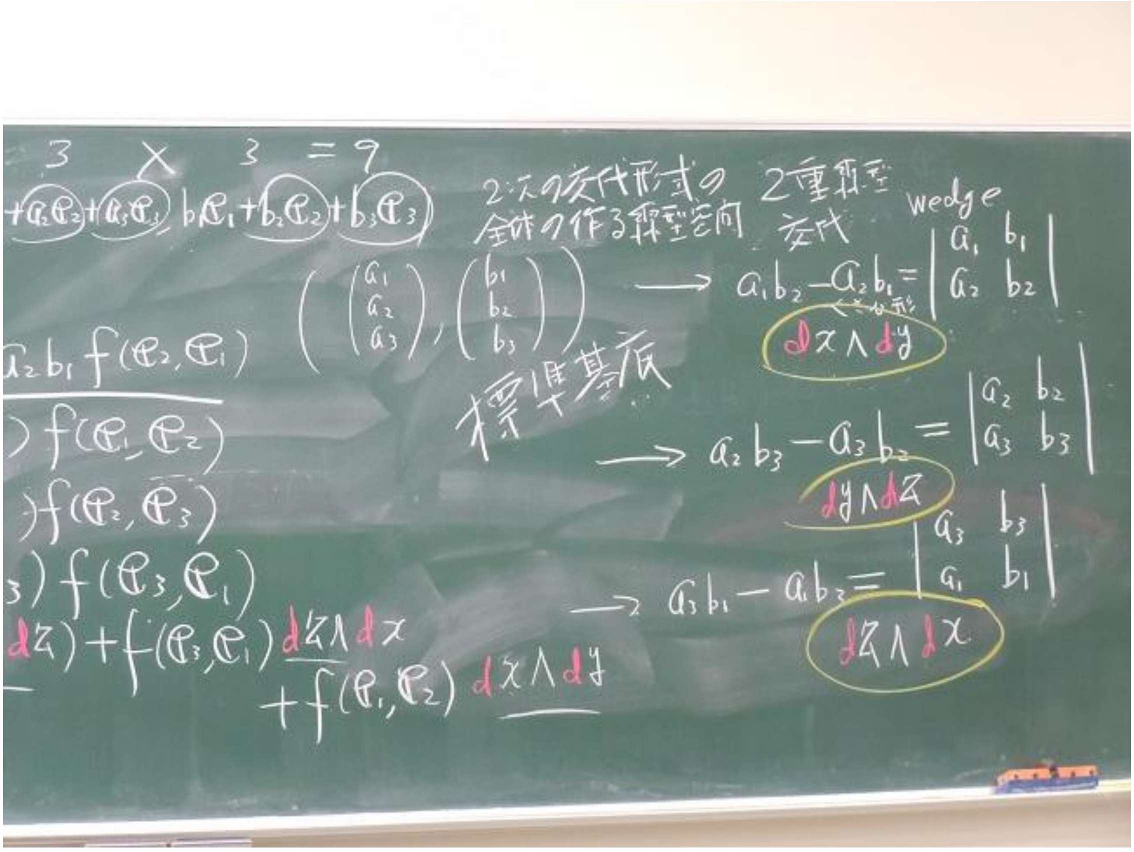
2次の交代形式の全体の作る線型空間

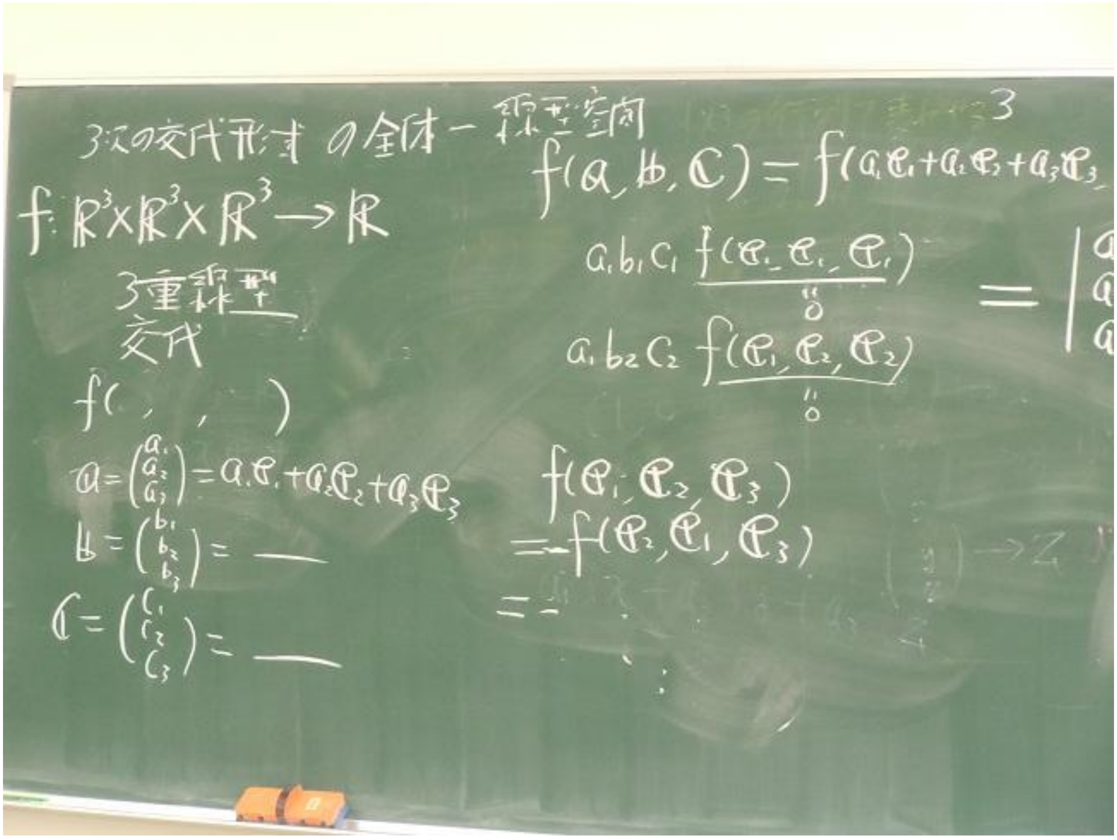
$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \longrightarrow a_1 \ldots$

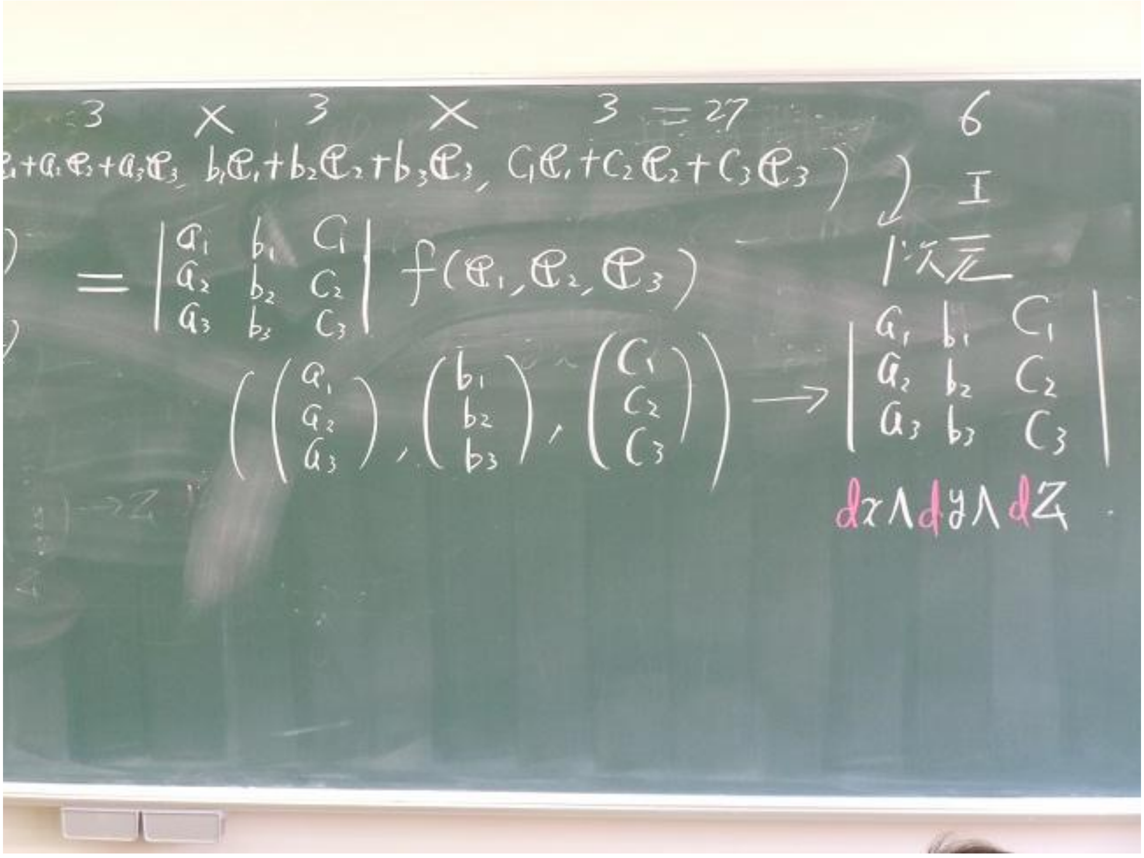
標準基底

$\longrightarrow a_2 b \ldots$

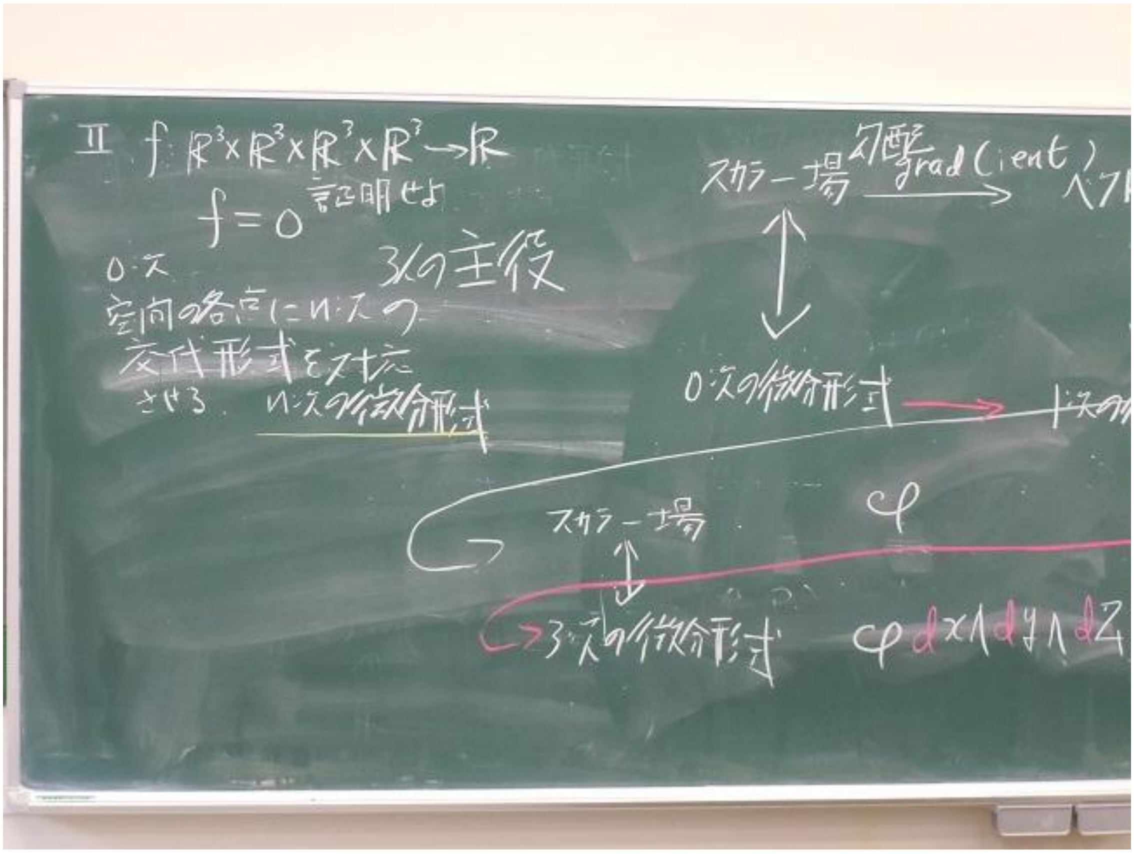
$\longrightarrow a_3 b_1 - \ldots$


3 × 3 = 9
2次の交代形式の
全体の作る線型空間
2重線型
交代
wedge
標準基底
dx∧dy
dy∧dz
dz∧dx

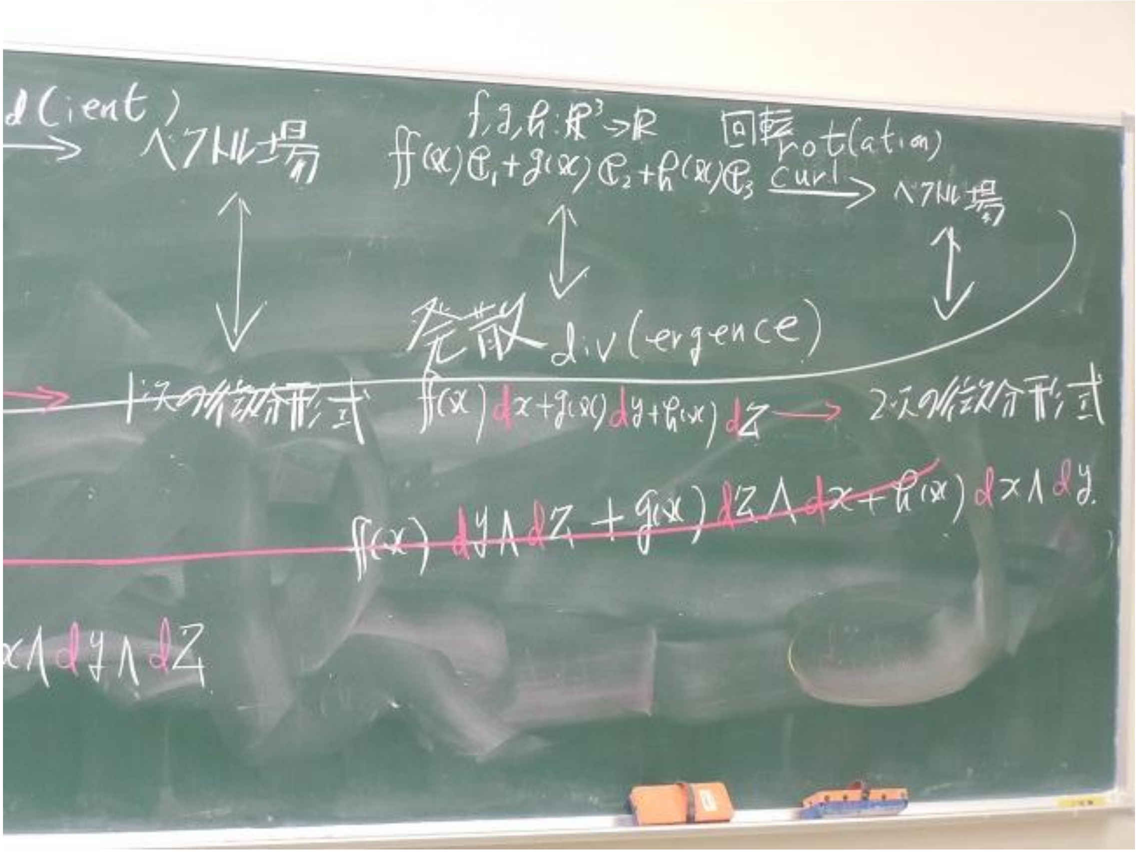

3次の交代形式 の全体 ー 線型空間
f: R³×R³×R³ → R
3重線型
交代

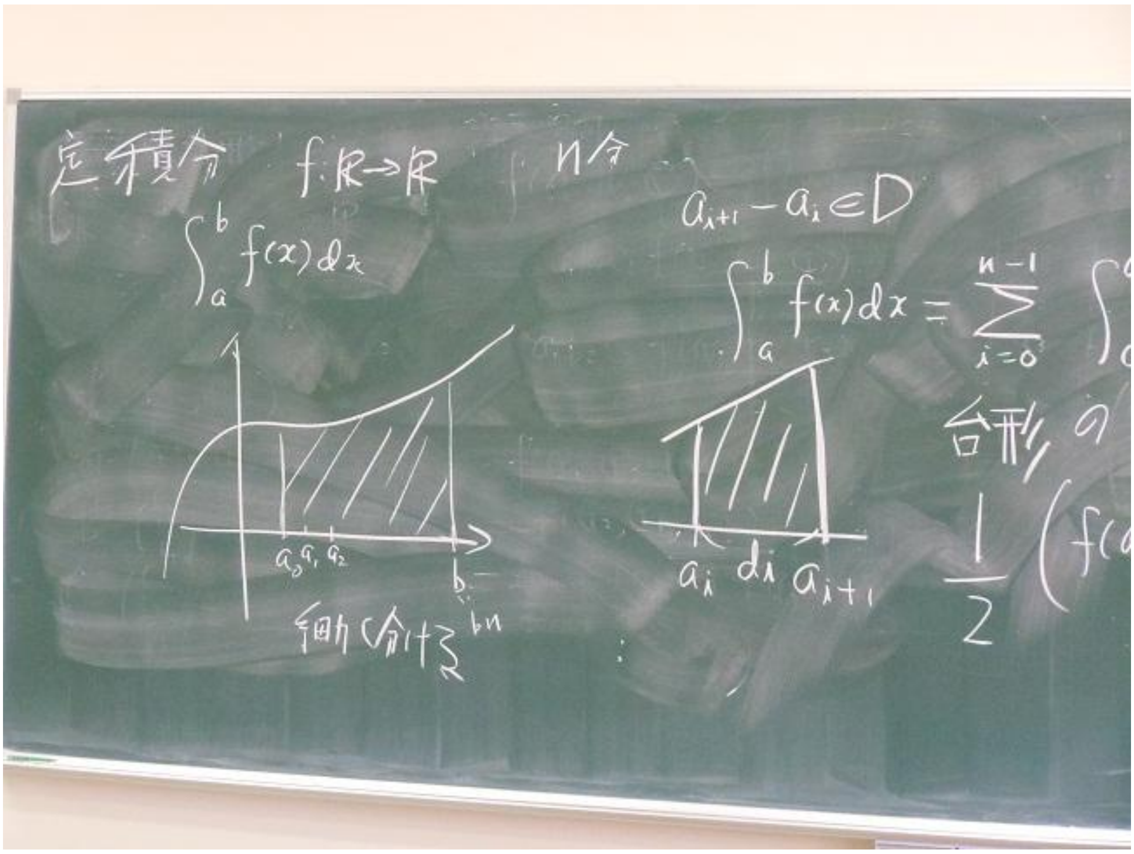


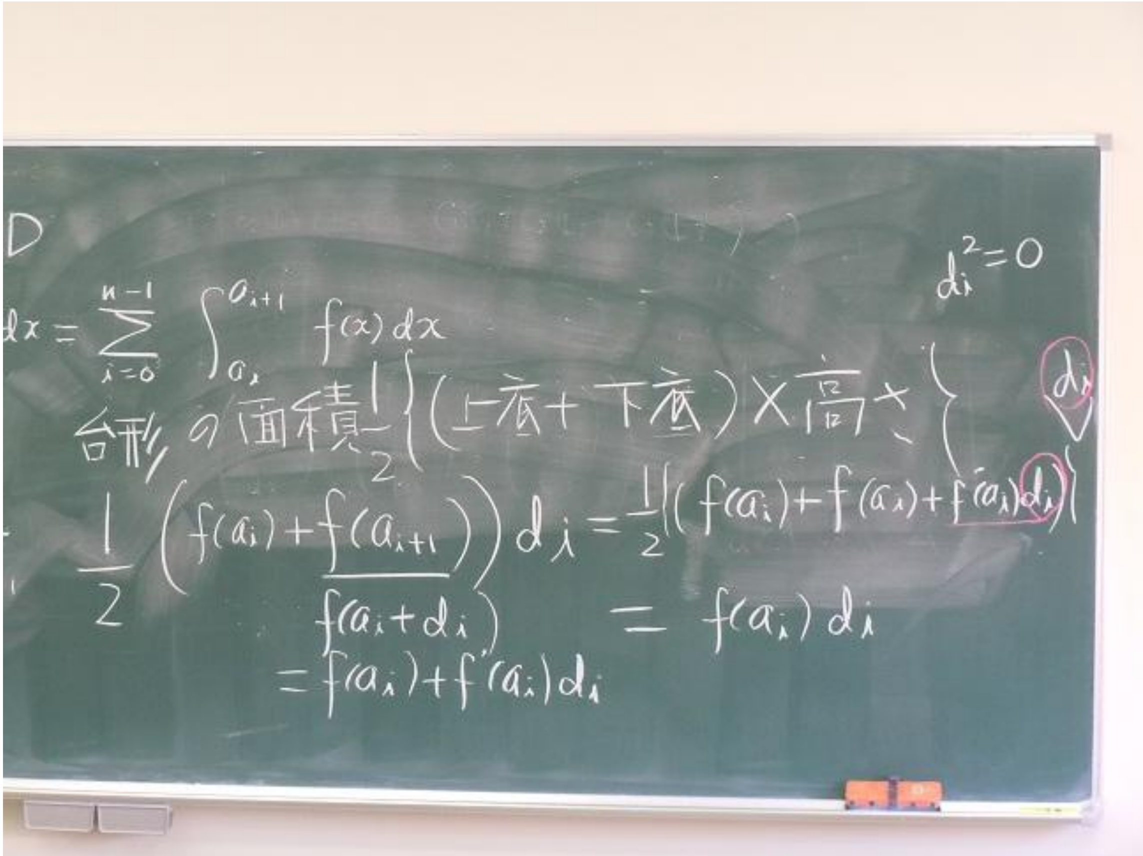
$3 \times 3 \times 3 = 27$
6
$\ldots + a_2e_2 + a_3e_3,\ b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3,\ c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3))$
I
$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} f(e_1, e_2, e_3)$
1次元
$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right) \longrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
$dx \wedge dy \wedge dz$

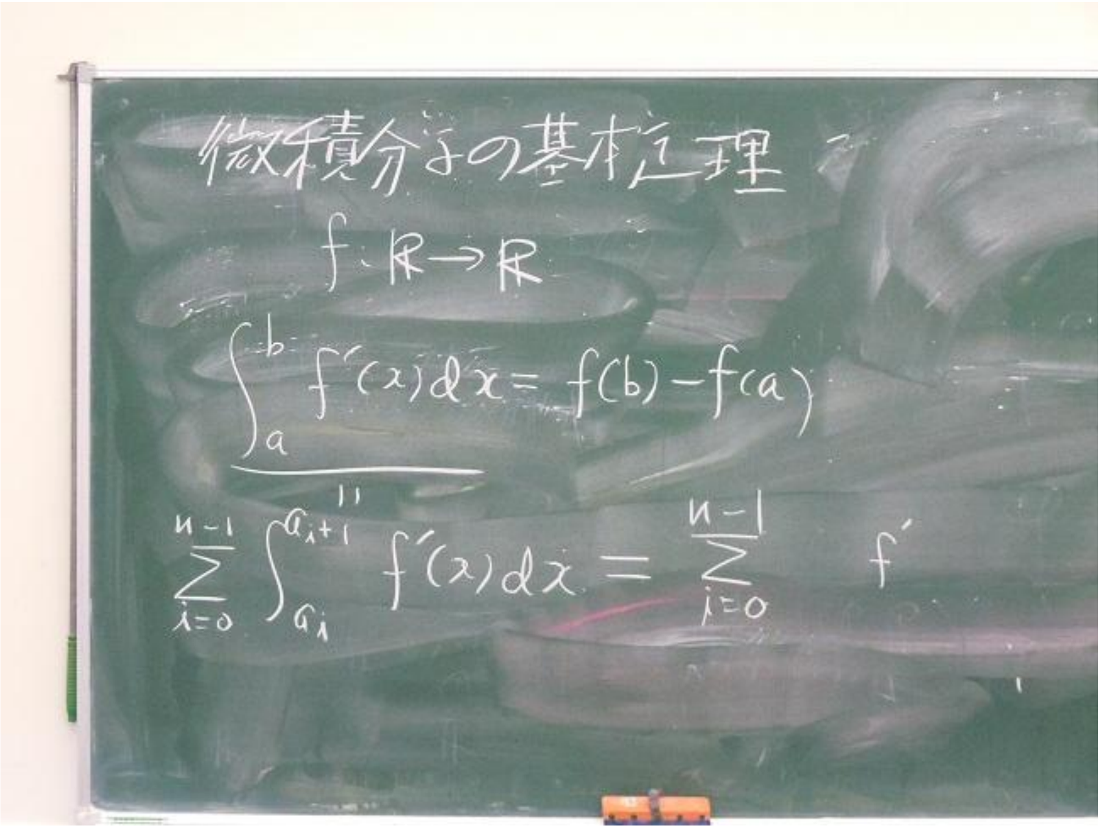


II $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$f = 0$ 証明せよ
0次
3次の主役
空間の各点にn次の交代形式を対応させる
n次の微分形式
スカラー場 $\xrightarrow{\text{勾配 grad(ient)}}$ ベクト
0次の微分形式 → 1次の
φ
スカラー場
3次の微分形式
$\varphi\, dx \wedge dy \wedge dz$


d(ient)
ベクトル場
f, g, h : R³ → R
回転 rotation
f(x)e₁ + g(x)e₂ + h(x)e₃ curl → ベクトル場
発散 div(ergence)
1次の微分形式 f(x)dx + g(x)dy + h(x)dz → 2次の微分形式
f(x)dy∧dz + g(x)dz∧dx + h(x)dx∧dy
x∧dy∧dz


定積分 f : R → R
n分
∫ₐᵇ f(x)dx
aᵢ₊₁ − aᵢ ∈ D
∫ₐᵇ f(x)dx = Σᵢ₌₀ⁿ⁻¹
a₀ a₁ a₂
b
細く分ける
bn
aᵢ dᵢ aᵢ₊₁
台形の
1/2


D
$d_i^2=0$
$dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx$
台形の面積 $\frac{1}{2}$ {(上底+下底)×高さ}
$\frac{1}{2}\left(f(a_i)+f(a_{i+1})\right)d_i = \frac{1}{2}\{(f(a_i)+f(a_i)+f'(a_i)d_i)d_i\}$
$f(a_i+d_i)$
$= f(a_i)d_i$
$= f(a_i)+f'(a_i)d_i$


微積分学の基本定理
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$
$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f'$