

ベクトル解析

platonicな立場

力の場

流れの場

ベクトル場

空間の各点にベクトルを対応させる

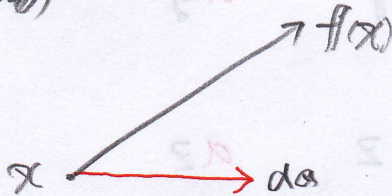
pragmaticな立場 (自然科学の立場)

どのように計測するか?

空間の各点に  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  の線型関数を対応させる

(力の場)

1次の微分形式

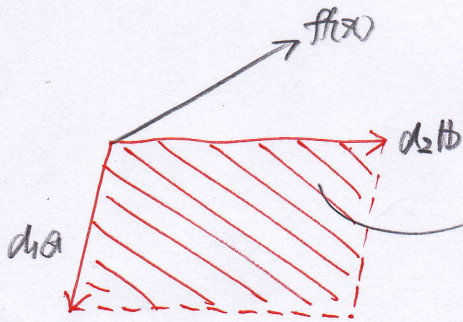


$$\text{仕事 } f(x) \cdot (da) = (f(x) \cdot a) \cdot d$$

$$a \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(x) \cdot a \in \mathbb{R}$$

線型関数 (主役)

(流れの場)

この  $f$  を単位時間にとりだだけの量が横切るか?

(横切った水に色をつけるときその体積は...)

 $da, db, f(x)$  で決まる

平行六面体の体積

$$f(x) (da \times db) = f(x) \cdot (a \times b) da db$$

$$(a \times b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto f(x) (a \times b) \in \mathbb{R}$$

2重線型  
2次の交代形式  
反対称

空間の各点に2次の交代形式を対応させる

2次の微分形式

$\mathbb{R}^3$  から  $\mathbb{R}$  への線型写像の全体  $L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

$\mathbb{R}^3$ : 標準基底

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad (\text{一般的})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \underbrace{(a_1 \ a_2 \ a_3)}_{1 \times 3 \text{ 行列で表せる!!}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

$$(1, 0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x \quad \xrightarrow{dx} \left( \frac{dy}{dx} \text{ の } d \right)$$

$$(0, 1, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y \quad dy$$

$$(0, 0, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z \quad dz$$

$$\Rightarrow L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}) \hookrightarrow a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz \quad (\text{一般的に表せる})$$

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x \in \mathbb{R}^3)$$

$$\varphi'(x) = d\varphi(x) \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$$

$$\varphi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) dz$$

$$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

2次の交代形式  $\begin{cases} \text{2重積型} \cdots \textcircled{1} \\ \text{交代} \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

$$a \in \mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$b \in \mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

$$\begin{aligned} f(a, b) &= f(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) \quad \textcircled{1} \\ &= a_1 b_1 \underbrace{f(e_1, e_1)}_{=0} + a_1 b_2 \underbrace{f(e_1, e_2)}_{=0} + a_1 b_3 \underbrace{f(e_1, e_3)}_{=0} \\ &\quad + a_2 b_1 \underbrace{f(e_2, e_1)}_{=0} + a_2 b_2 \underbrace{f(e_2, e_2)}_{=0} + a_2 b_3 \underbrace{f(e_2, e_3)}_{=0} \\ &\quad + a_3 b_1 \underbrace{f(e_3, e_1)}_{=0} + a_3 b_2 \underbrace{f(e_3, e_2)}_{=0} + a_3 b_3 \underbrace{f(e_3, e_3)}_{=0} \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) f(e_1, e_2) \quad \textcircled{2} \\ &\quad + (a_2 b_3 - a_3 b_2) f(e_2, e_3) \\ &\quad + (a_3 b_1 - a_1 b_3) f(e_3, e_1) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \mapsto a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$dx \wedge dy$$

$$" \mapsto a_2 b_3 - a_3 b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$dy \wedge dz$$

$$" \mapsto a_3 b_1 - a_1 b_3 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$dz \wedge dx$$

$$f = f(e_2, e_3) \underline{dy \wedge dz} + f(e_3, e_1) \underline{dz \wedge dx} + f(e_1, e_2) \underline{dx \wedge dy}$$

2次の交代形式の全体のつくる線型空間の標準基底.

3次の交代形式 — 線型写像

これは1次元

$$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

三重線型  
交代

$$f(a, b, c)$$

$$\begin{pmatrix} a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \\ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 \end{pmatrix}$$

$$= f(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3, c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)$$

$$= a_1 b_1 c_1 \underbrace{f(e_1, e_1, e_1)}_{=0} + \dots$$

$$= \dots$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} f(e_1, e_2, e_3)$$

1次元

$$\left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$dx \wedge dy \wedge dz$$

レポート問題1 (これを示せ)

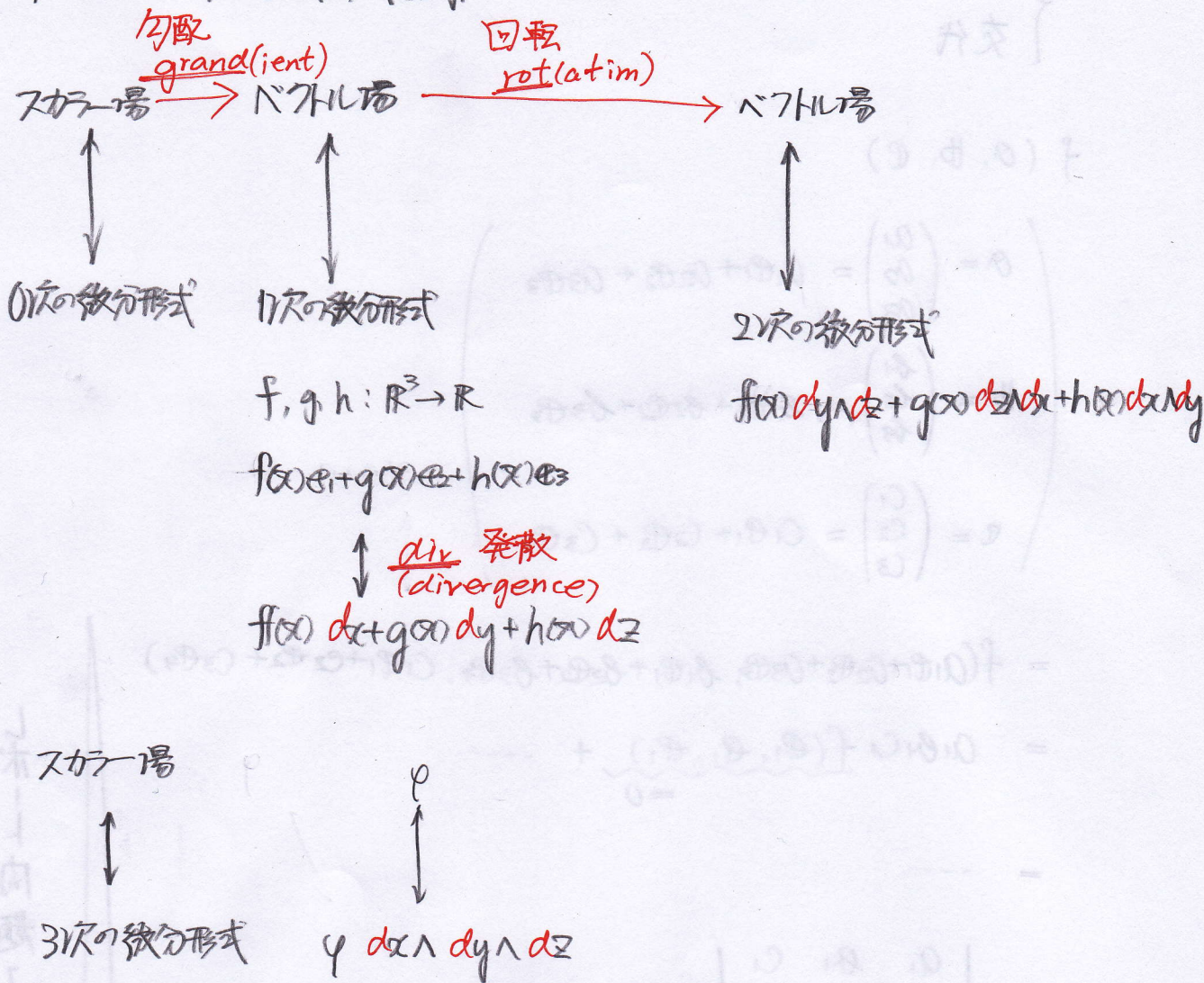
(レポート問題Ⅱ)

$$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f=0 \quad \text{を証明せよ.}$$

(0点)

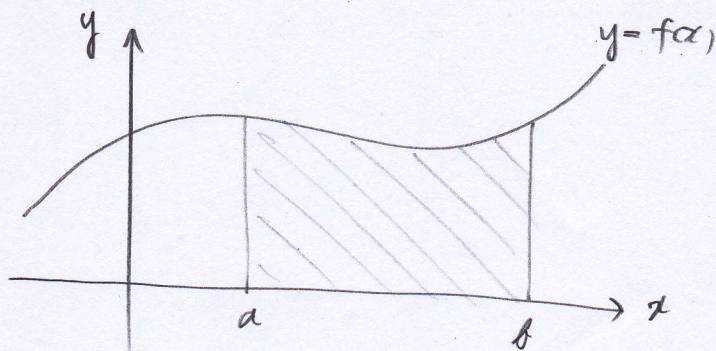
空間の各点に1次の交代形式を対応させる.



# 定積分

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

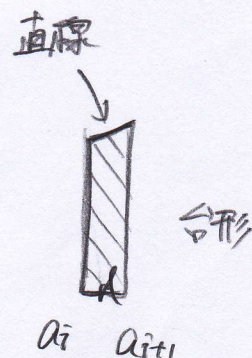


n分割

$$a_{i+1} - a_i \in D \text{ (必ずしも } D \text{ が必要)}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx$$

(間隔が非常に小さいとき... Riemann-Stieltjesの公理から)



(台形の面積)

$$= \frac{1}{2} \{ (上底 + 下底) \times 高さ \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (f(a_i) + f(a_{i+1})) \Delta x \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (f(a_i) + f(a_i + \Delta x)) \Delta x \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (f(a_i) + f(a_i) + f'(a_i) \Delta x) \Delta x \}$$

$$= f(a_i) \Delta x$$

微積分の基本定理

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \quad (\text{以降未定...})$$

10/3(水)

微積分(生物学類)

古典的

バクトル解析

力の場

流れの場

バクトル場 ... 空間の各点にバクトルを対応させる  
(platonic な立場)

pragmatic な立場

どのように計測するか?

力の場 ... 空間の各点に  $\mathbb{R}^3$  から  $\mathbb{R}$  の線型関数を対応させる

$f(x)$   
 $x$   
 $da$

 $d \in D$ 

1次の微積分形式

動かして仕事を計測する

$$f(x) \cdot (da) = (f(x) \cdot a) da$$

$$\begin{array}{ccc} a & \mapsto & f(x) \cdot a \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R} \end{array}$$

線型関数(主役)

流れの場

マスを作る

$f(x)$   
 $x$   
 $da$   $db$

 $d_1, d_2 \in D$ 

このマス(升)を単位時間にとれただけの量が横切るか?

 $d_1 a, d_2 b, f(x)$  で 3 長される平行六面体の体積を計算する

$$f(x) \cdot (d_1 a \times d_2 b) = (f(x) \cdot (a \times b)) d_1 d_2$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto f(x) \cdot (a \times b) \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} \text{2重線型} \\ \text{交代(反対称)} \end{array}$$

空間の各点に 2 次の交代形式を対応させる

2次の微積分形式

2 次の交代形式

再発見  $a = e_1, b = e_2$  とおくと

$$e_1 \times e_2 = e_3$$

 $f(x) \cdot e_3$  は  $f(x)$  の  $z$  成分

$\mathbb{R}^3$  から  $\mathbb{R}$  の線型写像の全体

$$L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$$

$\mathbb{R}^3$  標準基底  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \text{ と一意的に書ける}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{(a_1, a_2, a_3)}_{1 \times 3 \text{ の行列で表せる}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\uparrow \mathbb{R}^3 \qquad \qquad \qquad \uparrow \mathbb{R}$

$\frac{dy}{dx}$  という意味での  $d$

$$(1, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x \quad dx$$

$$(0, 1, 0)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y \quad dy$$

$$(0, 0, 1)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z \quad dz$$

$$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz \text{ と一意的に書ける}$$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  一般の関数

$$x \in \mathbb{R}^3$$

$$\varphi'(x) = d\varphi(x) \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$$

$$\varphi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) dz$$

$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  2 変の交代形式

$\left\{ \begin{array}{l} \text{2重線型} \\ \text{交代(反対称)} \end{array} \right.$

$$a \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \quad b \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3, \quad c \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$

$$f(a, b) = f(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{f(e_1, e_1)}_0 + a_2 b_2 \underbrace{f(e_2, e_2)}_0 + a_3 b_3 \underbrace{f(e_3, e_3)}_0$$

$$+ a_1 b_2 f(e_1, e_2) + a_2 b_1 f(e_2, e_1)$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) f(e_1, e_2)$$

$$\text{同様に} \rightarrow + (a_2 b_3 - a_3 b_2) f(e_2, e_3)$$

$$+ (a_3 b_1 - a_1 b_3) f(e_3, e_1)$$

↑ 反対称 f の性質

$$f(e_1, e_1) = -f(e_1, e_1)$$

$$2f(e_1, e_1) = 0$$

$$f(e_1, e_1) = 0$$

反対称

$$f(e_2, e_1) = -f(e_1, e_2)$$

$$\left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \rightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$dx \wedge dy$$

$$\rightarrow a_2 b_3 - a_3 b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$dy \wedge dz$$

$$\rightarrow a_3 b_1 - a_1 b_3 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$dz \wedge dx$$

$\wedge \dots$  <wedge> 形  
wedge

$$f = f(e_2, e_3)(dy \wedge dz) + f(e_3, e_1)(dz \wedge dx) + f(e_1, e_2)(dx \wedge dy)$$

2次の交代形式の全体の  
作る線型空間の基底

3次の交代形式

$$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} \text{3重線型} \\ \text{交代(反対称)} \end{cases}$$

$$f(a, b, c)$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$

$$\underline{f(a, b, c) = f(a, e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b, e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3, c, e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)}$$

$$\begin{pmatrix} a, b, c, \underbrace{f(e_1, e_1, e_1)}_0 \\ \underbrace{a, b, c}_0, \underbrace{f(e_1, e_2, e_2)}_0 \\ f(e_1, e_2, e_3) = -f(e_2, e_1, e_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} f(e_1, e_2, e_3)$$

レポートI 過程を省かずに計算

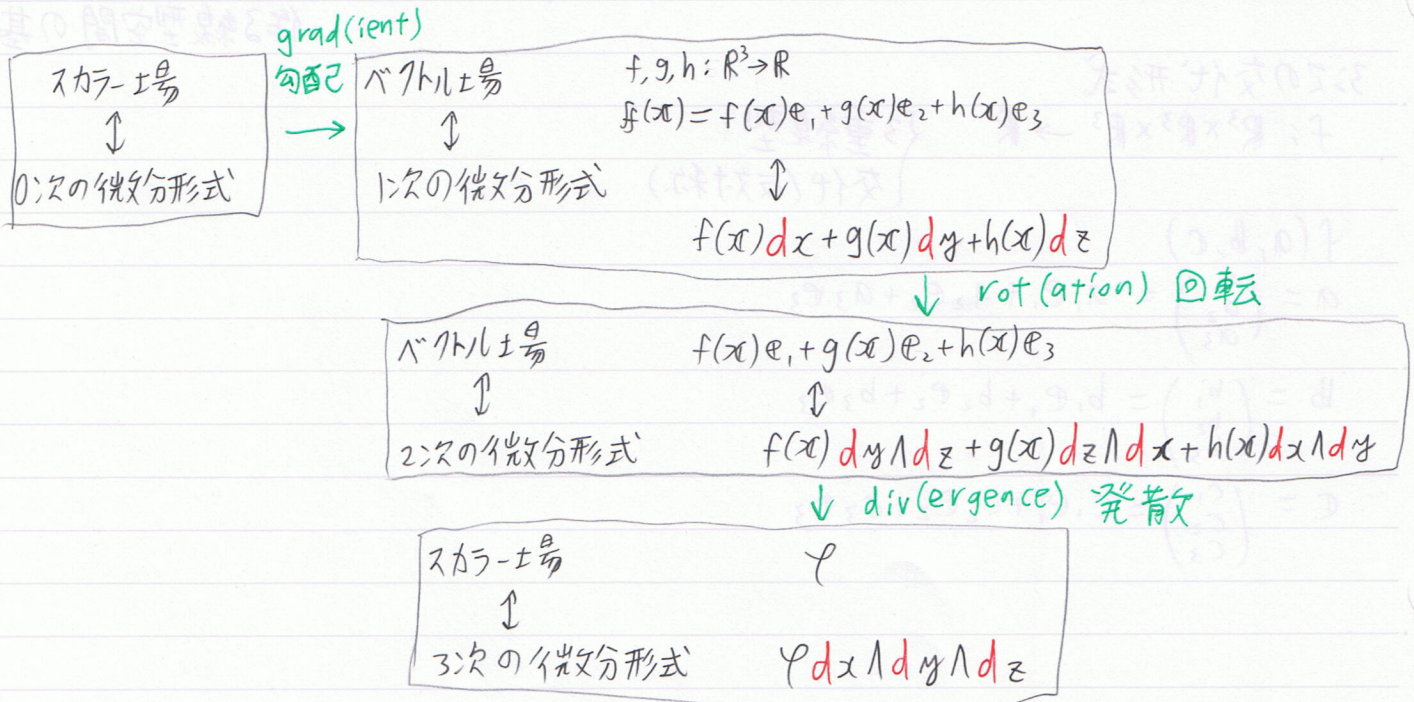
$$\left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} dx \wedge dy \wedge dz$$

1:次元

レポートII  $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  {4重線型  
交代(反対称)}

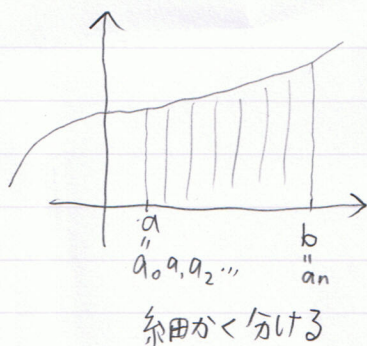
のとき、 $f=0$ を証明せよ。

空間の各点にn次の交代形式を対応させる... n次の微分形式



定積分  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x) dx$$



$$a_{i+1} - a_i \in D$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx$$

Rock-Lawvereの公理により、それぞれの帯の幅は  $d \in D$  なので



それぞれの帯は台形

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \{ (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高さ} \}$$

$$\frac{1}{2} \{ (f(a_i) + \underbrace{f(a_{i+1})}_{f(a_i + d_i)}) d_i \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (f(a_i) + f(a_i) + f'(a_i) d_i) d_i \}$$

$$= f(a_i) d_i$$

$$\underbrace{(d_i)^2}_{(d_i)^2=0} = 0$$

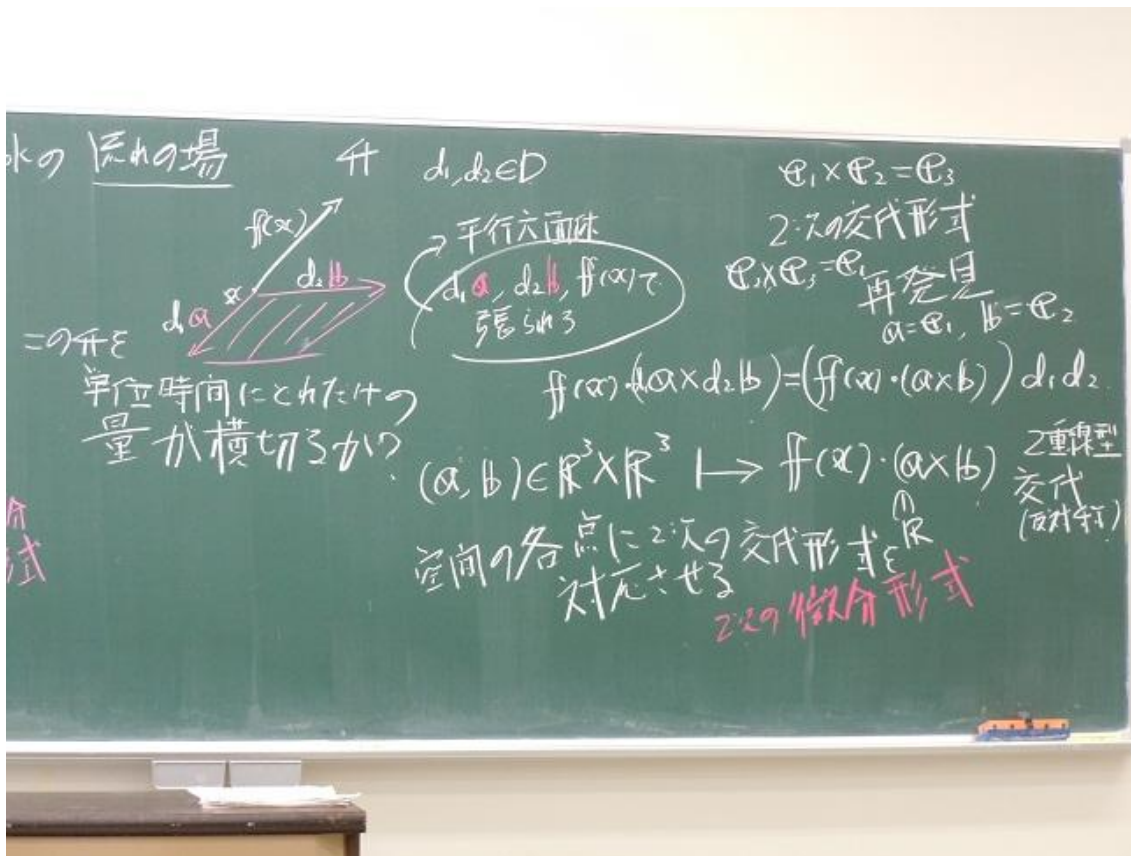
微積分学の基本定理

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

||

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} f'$$



$\mathbb{R}^3$  から  $\mathbb{R}$  への線型写像の全体  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$\mathbb{R}^3$  標準基底  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x, y, z \in \mathbb{R}$   
 $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$   
 (一意)

$1 \times 3$  の行列で表せる

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

①  $\mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x$   
 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y$   
 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z$

$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$   
 (一意)

$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  一般の関数

$\varphi'(x) = d\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$\varphi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) dz$

$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  2次の交代形式  $\begin{cases} \text{2重線型} \\ \text{交代} \end{cases}$   $3!/2! = 3$

$f(a, b) = f(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)$   
 $= a_1 b_1 f(e_1, e_1) + a_1 b_2 f(e_1, e_2) + a_1 b_3 f(e_1, e_3) + a_2 b_1 f(e_2, e_1) + a_2 b_2 f(e_2, e_2) + a_2 b_3 f(e_2, e_3) + a_3 b_1 f(e_3, e_1) + a_3 b_2 f(e_3, e_2) + a_3 b_3 f(e_3, e_3)$

$a \in \mathbb{R}^3 \quad f(e_1, e_2) = -f(e_2, e_1)$   
 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$

$b \in \mathbb{R}^3 \quad f(e_1, e_1) = -f(e_1, e_1) \Rightarrow 2f(e_1, e_1) = 0$   
 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$

$f = f(e_2, e_3) dy \wedge dz + f(e_3, e_1) dz \wedge dx + f(e_1, e_2) dx \wedge dy$

$3!/2! = 3 \times 3 = 9$

$f(a, b) = f(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)$

$f(e_1, e_1) = 0$   
 $f(e_1, e_2) + a_2 b_1 f(e_2, e_1)$   
 $(a_1 b_2 - a_2 b_1) f(e_1, e_2)$   
 $(a_2 b_3 - a_3 b_2) f(e_2, e_3)$   
 $(a_3 b_1 - a_1 b_3) f(e_3, e_1)$

$f(e_2, e_3) dy \wedge dz + f(e_3, e_1) dz \wedge dx + f(e_1, e_2) dx \wedge dy$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow a_1, a_2, a_3$   
 標準基底

$3 \times 3 = 9$   
 $(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)$

2次の交代形式の 2重積型  
 全体の作る積型空間 交代

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$   
 $\text{標準基底} \rightarrow a_2 b_3 - a_3 b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$   
 $\rightarrow a_3 b_1 - a_1 b_3 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$

$\text{wedge } e_1, e_2, e_3$   
 $d x \wedge d y$   
 $d y \wedge d z$   
 $d z \wedge d x$

$a_2 b_1 f(e_2, e_1)$   
 $f(e_1, e_2)$   
 $f(e_2, e_3)$   
 $f(e_3, e_1)$   
 $d z + f(e_3, e_1) \frac{d z \wedge d x}{d x \wedge d y} + f(e_1, e_2) \frac{d x \wedge d y}{d x \wedge d y}$

3次の交代形式の全体 - 積型空間  
 $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

3重積型  
 交代

$f(a, b, c) = f(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3, c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)$   
 $a_1 b_1 c_1 f(e_1, e_1, e_1) = 0$   
 $a_1 b_2 c_2 f(e_1, e_2, e_2) = 0$   
 $a_1 b_3 c_3 f(e_1, e_3, e_3) = 0$   
 $a_1 b_2 c_3 f(e_1, e_2, e_3)$   
 $a_2 b_1 c_3 f(e_2, e_1, e_3)$   
 $a_2 b_3 c_1 f(e_2, e_3, e_1)$   
 $a_3 b_1 c_2 f(e_3, e_1, e_2)$   
 $a_3 b_2 c_1 f(e_3, e_2, e_1)$

$f(e_1, e_2, e_3) = 1$   
 $f(e_2, e_1, e_3) = -1$   
 $f(e_3, e_1, e_2) = 1$   
 $f(e_3, e_2, e_1) = -1$

$$\begin{aligned}
 & 3 \times 3 \times 3 = 27 \quad 6 \\
 & (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3, c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3) \rightarrow I \\
 & = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} f(e_1, e_2, e_3) \quad \text{1-スカラー} \\
 & \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
 & \quad \quad \quad dx \wedge dy \wedge dz
 \end{aligned}$$

II  $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$f=0$  証明せよ

0-スカラー場の各点には1-スカラー場の交代形式が存在する

3-スカラー場の交代形式

1-スカラー場の交代形式

2-スカラー場の交代形式

3-スカラー場の交代形式

4-スカラー場の交代形式

5-スカラー場の交代形式

6-スカラー場の交代形式

7-スカラー場の交代形式

8-スカラー場の交代形式

9-スカラー場の交代形式

10-スカラー場の交代形式

11-スカラー場の交代形式

12-スカラー場の交代形式

13-スカラー場の交代形式

14-スカラー場の交代形式

15-スカラー場の交代形式

16-スカラー場の交代形式

17-スカラー場の交代形式

18-スカラー場の交代形式

19-スカラー場の交代形式

20-スカラー場の交代形式

21-スカラー場の交代形式

22-スカラー場の交代形式

23-スカラー場の交代形式

24-スカラー場の交代形式

25-スカラー場の交代形式

26-スカラー場の交代形式

27-スカラー場の交代形式

28-スカラー場の交代形式

29-スカラー場の交代形式

30-スカラー場の交代形式

31-スカラー場の交代形式

32-スカラー場の交代形式

33-スカラー場の交代形式

34-スカラー場の交代形式

35-スカラー場の交代形式

36-スカラー場の交代形式

37-スカラー場の交代形式

38-スカラー場の交代形式

39-スカラー場の交代形式

40-スカラー場の交代形式

41-スカラー場の交代形式

42-スカラー場の交代形式

43-スカラー場の交代形式

44-スカラー場の交代形式

45-スカラー場の交代形式

46-スカラー場の交代形式

47-スカラー場の交代形式

48-スカラー場の交代形式

49-スカラー場の交代形式

50-スカラー場の交代形式

51-スカラー場の交代形式

52-スカラー場の交代形式

53-スカラー場の交代形式

54-スカラー場の交代形式

55-スカラー場の交代形式

56-スカラー場の交代形式

57-スカラー場の交代形式

58-スカラー場の交代形式

59-スカラー場の交代形式

60-スカラー場の交代形式

61-スカラー場の交代形式

62-スカラー場の交代形式

63-スカラー場の交代形式

64-スカラー場の交代形式

65-スカラー場の交代形式

66-スカラー場の交代形式

67-スカラー場の交代形式

68-スカラー場の交代形式

69-スカラー場の交代形式

70-スカラー場の交代形式

71-スカラー場の交代形式

72-スカラー場の交代形式

73-スカラー場の交代形式

74-スカラー場の交代形式

75-スカラー場の交代形式

76-スカラー場の交代形式

77-スカラー場の交代形式

78-スカラー場の交代形式

79-スカラー場の交代形式

80-スカラー場の交代形式

81-スカラー場の交代形式

82-スカラー場の交代形式

83-スカラー場の交代形式

84-スカラー場の交代形式

85-スカラー場の交代形式

86-スカラー場の交代形式

87-スカラー場の交代形式

88-スカラー場の交代形式

89-スカラー場の交代形式

90-スカラー場の交代形式

91-スカラー場の交代形式

92-スカラー場の交代形式

93-スカラー場の交代形式

94-スカラー場の交代形式

95-スカラー場の交代形式

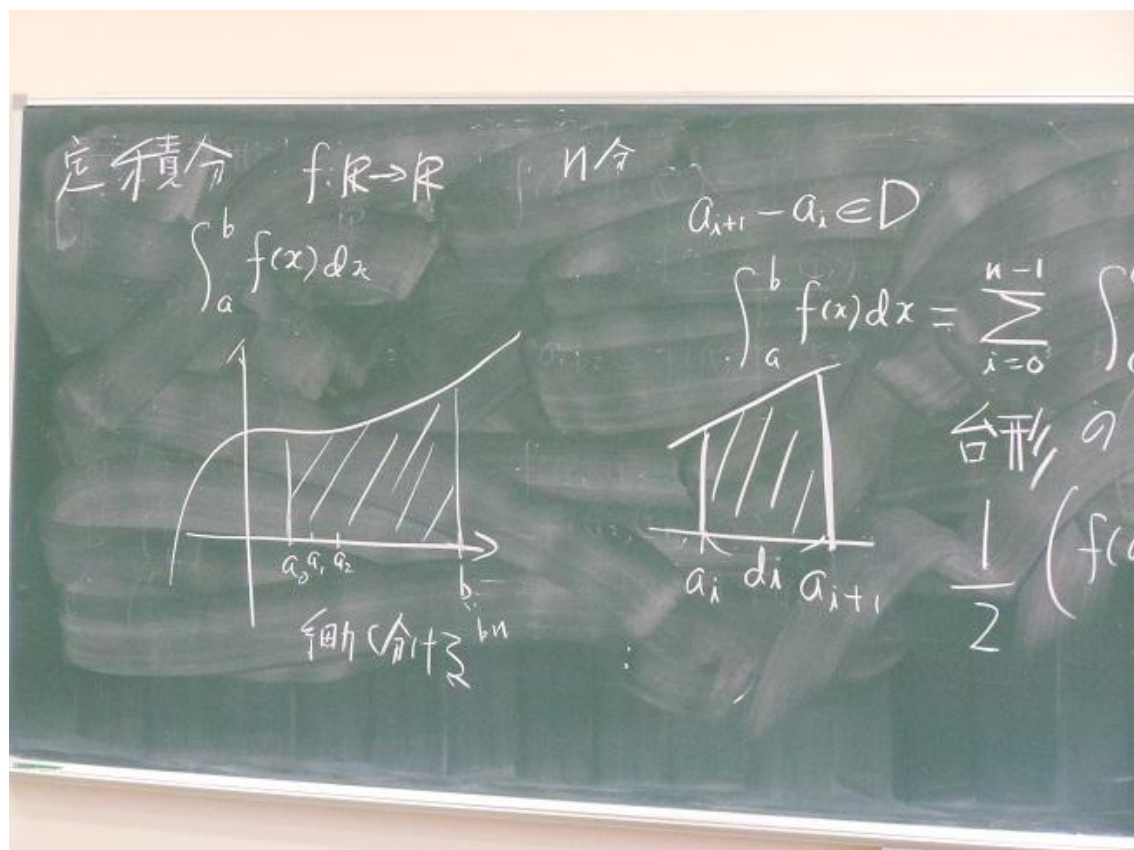
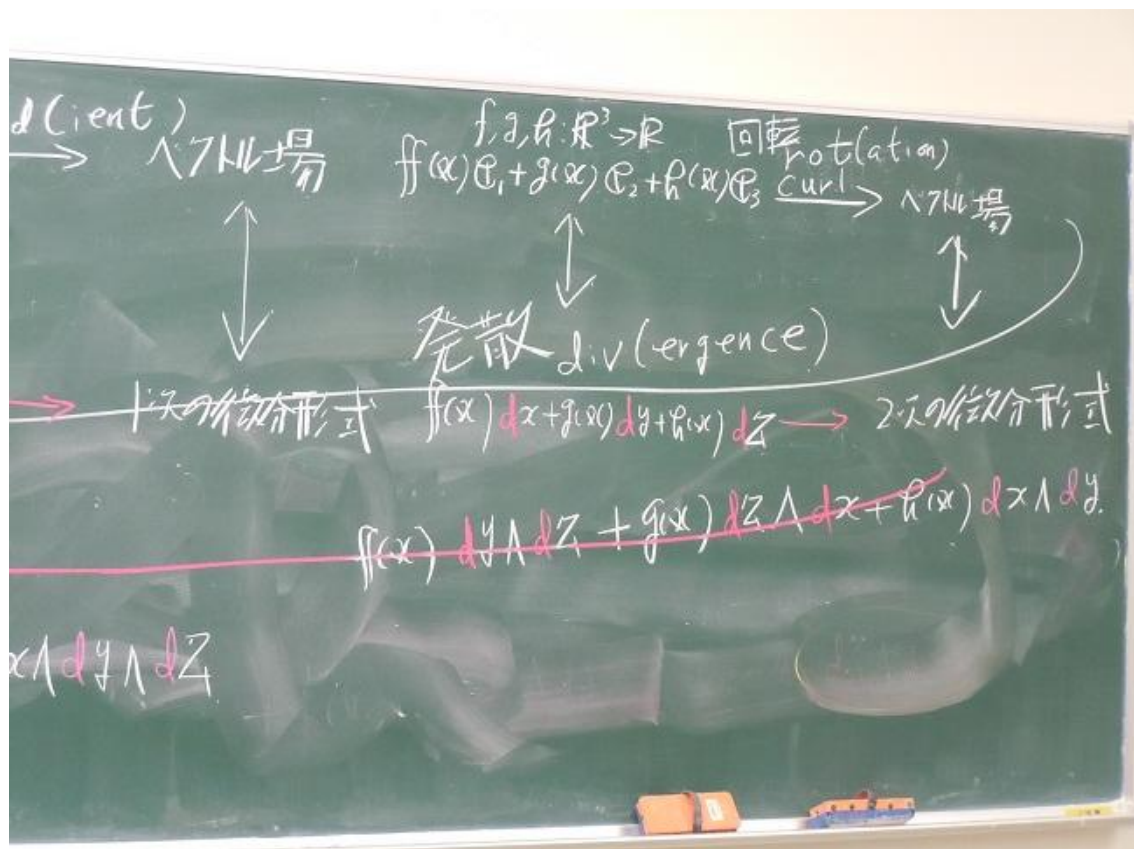
96-スカラー場の交代形式

97-スカラー場の交代形式

98-スカラー場の交代形式

99-スカラー場の交代形式

100-スカラー場の交代形式



D

$$dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx$$

台形の面積  $\frac{1}{2} \left( \text{上底} + \text{下底} \right) \times \text{高さ}$

$$\frac{1}{2} \left( f(a_i) + f(a_{i+1}) \right) d_i = \frac{1}{2} \left( f(a_i) + f(a_i) + f'(a_i) d_i \right) d_i$$

$$= f(a_i) d_i + \frac{1}{2} f'(a_i) d_i^2$$

$d_i^2 = 0$

### 微積分の基本定理

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} f'$$