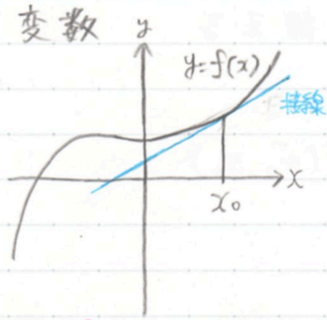
微分

1変数



2通りの表え方
- 17C & 18C (Newton Euler Leibniz…
- 19C以降 極限→微分
  どんどん近付いていく
  しかし接線になる事はない(一般)

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$D=\{d\in\mathbb{R} \mid d^2=0\}\neq\{0\}$ ⇐ x_0+d dを2回かけると0になる位
実数の全体
小さくなれば接線そのものに一致

こういうdがNewton達にはいっぱいある様に見えた。

$f(x_0+h)-f(x_0)\neq f'(x_0)h$

$\boxed{(\exists!\, a\in\mathbb{R})(\forall d\in D)\ f(x_0+d)-f(x_0)=ad}$

aと書こう

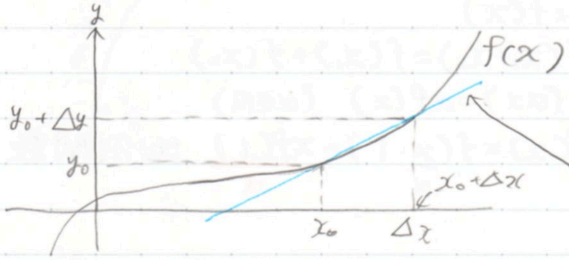
$d\in D\to f(x_0+d)$

$f(x_0+d)=f(x_0)+ad$

一般に
関数$g: D\to\mathbb{R}$に対して
$(\exists!\, a\in\mathbb{R})(\forall d\in D)(g(d)=g(0)+ad)$

Kuck-Lawvereの公理

Leibnizの公式 $(fg)'=f'g+fg'$ 証明



$y=f(x_0)$
$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
$\Delta x\to\Delta y$ 一般に複雑な関数
比例関数
接線へ移ってしまえば
$\Delta y=a\Delta x$ ← $f'(x)$
比例定数

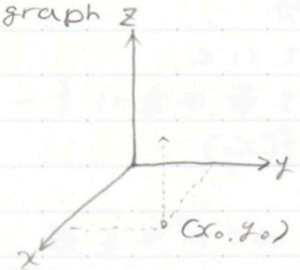
9・1

多変数の微積分

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$　2変数　　接線を接平面で置き換える

$z = f(x, y)$　　方程式は↓

graph



$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$

$\Delta z = z - z_0 = f(x, y) - f(x_0, y_0)$

$\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = y - y_0$

yをy_0に固定　$\Delta y = 0$　$(y = y_0)$

$x \to f(x, y_0)$　1変数　　$\mathbb{R}^3$以上は？→代数化

$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$　(x_0, y_0)におけるx方向の偏微分

$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$　（同様に）

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$　　$\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への線型関数

$(\Delta x, \Delta y) \mapsto a\Delta x + b\Delta y$　　$y = f(x)$

$\mathbb{R}^2$　　$\mathbb{R}$　　(1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

線形関数　足し算　　(2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$　$(\alpha \in \mathbb{R})$

空間　スカラー倍　　$f(x) = f(\underset{\alpha}{\underline{x}} \cdot 1) = x\underbrace{f(1)}_{a}$　比例関数

これしかない

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$への線型関数

$f(x, y) = f(x(1,0)) + f(x(0,1)) = x\underbrace{f(0,1)}_{a} + y\underbrace{f(0,1)}_{b}$

$f(x_1, \cdots, x_n) = y$　n変数の関数

$(x_1^0, \cdots, x_n^0)$で微分する$\mathbb{R}^2$から$\mathbb{R}$への線型写像

$\Delta y = a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + \cdots + a_n\Delta x_n$　$a_1, \cdots, a_n$の決定

$\Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = 0$とおく

$a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, \cdots, x_n^0)$

$a_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}($　〃　$)$

$\vdots$

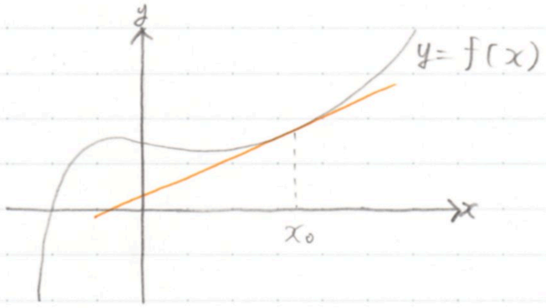
$a_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0, \cdots, x_n^0)$

偏微分

$\boxed{\text{曲がっているのは嫌　まっすぐなもので　置き換えよう}}$　motivation

9 1

Newtonの立場



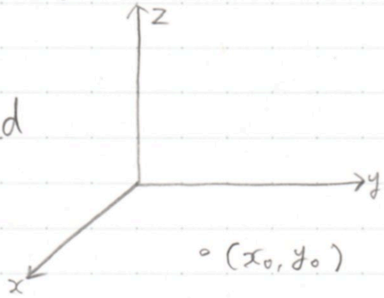
$f(x_0+d)=f(x_0)+ad$

↑

$f'(x_0)$

$\Delta z=\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ ← 接平面

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 特別な方向



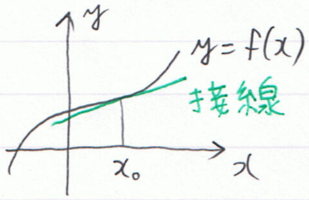
$d\in D \mapsto f(x_0+a_1d,\ y_0+a_2d)\in\mathbb{R}$

$f(x_0+a_1d,\ y_0+a_2d)=f(x_0,y_0)+\underline{b}d$

9/1 (水) 3限 微積分(生物学類)

微分

1変数



微分の考え方は2通り

17C & 18C	Newton	Euler
	Leibniz	Lagrange …

> 19C以降
>
> 極限 ⇒ 微分
>
> どんどん接線に近づいていく
>
> $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
>
> しかし、一般には接線になることはない

十分 x_0 に近づくと接線そのものになる

$x_0 + d$

d を2回かけると0になるくらい小さくすれば接線そのものに一致する

$$D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \} \neq \{0\}$$

実数の全体

こういう d がNewton達にはいっぱいあるように見えた

$$f(x_0+h) - f(x_0) \neq f'(x_0)h$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(\exists!\, a \in \mathbb{R})(\forall d \in D) \\ f(x_0+d) - f(x_0) = a d\end{array}}$$

$f'(x_0)$ と書こう

$d \in D \to f(x_0+d)$

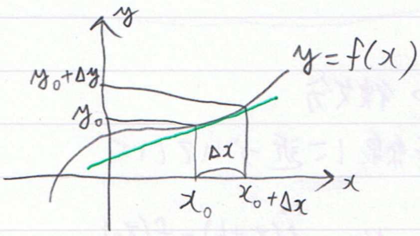
> 一般に
>
> 関数 $g : D \to \mathbb{R}$ に対して
>
> $(\exists!\, a \in \mathbb{R})(\forall d \in D)(g(d) = g(0) + ad)$

Kock-Lawvereの公理

$f(x_0+d) = f(x_0) + ad$

Leibnizの公式

$(fg)' = f'g + fg'$



$y_0 = f(x_0)$

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$\Delta x \to \Delta y$ ：一般には複雑な関数

接線に移ってしまえば、比例関数

$\Delta y = a\,\Delta x$

比例定数

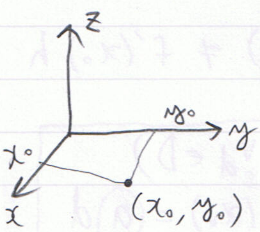
$f'(x_0)$

多変数の微積分

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 2変数

$z = f(x, y)$

graph：接平面



接平面の方程式 $z = f(x, y)$

$\Delta z = a\,\Delta x + b\,\Delta y$

$\Delta z = z - z_0 = f(x, y) - f(x_0, y_0)$

$\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = y - y_0$

yをy_0に固定 $(\Delta y = 0)$

$y = y_0$ $x \to f(x, y_0)$ 1変数

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$: (x_0, y_0)におけるx方向の偏微分

$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$　3次元になったらgraphが描けない

↓

代数化

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1変数　　　　　　2変数

$\Delta x \mapsto \Delta y$　　$(\Delta x, \Delta y) \longmapsto a\Delta x + b\Delta y$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$　　$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

線型関数
空間　　　足し算
　　　　　スカラー倍

$\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への線型関数

$y = f(x)$

(1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

(2) $f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$$f(x) = f(\underset{\alpha}{x}\,1) = x\underbrace{f(1)}_{a}$$ 比例関数

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$への線型関数

$$f(x,y) = f(x(1,0)) + f(y(0,1)) = x\underbrace{f(1,0)}_{a} + y\underbrace{f(0,1)}_{b}$$

$f(x_1, \cdots, x_n) = y$　n変数の関数

$(x_1^\circ, \cdots, x_n^\circ)$で微分する

$\mathbb{R}^n$から$\mathbb{R}$への線型写像

$\Delta y = a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + \cdots + a_n \Delta x_n$

$a_1, \cdots, a_n$の決定

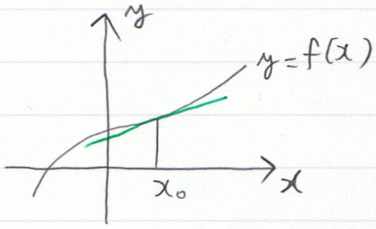
$\Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = 0$とおく

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^\circ, \cdots, x_n^\circ) \\ a_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^\circ, \cdots, x_n^\circ) \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^\circ, \cdots, x_n^\circ) \end{aligned}\right\} \text{偏微分}$$

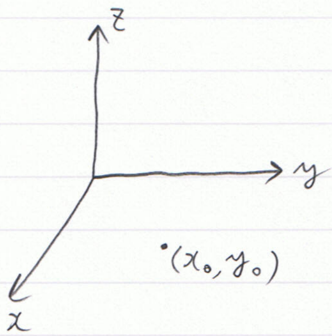
微分　$\boxed{\text{曲がっているのはイヤ　まっすぐなものでおきかえよう}}$

motivation

Newton達の立場



$$f(x_0+d) = f(x_0) + \underset{f'(x_0)}{\underset{\uparrow}{a}}\, d$$



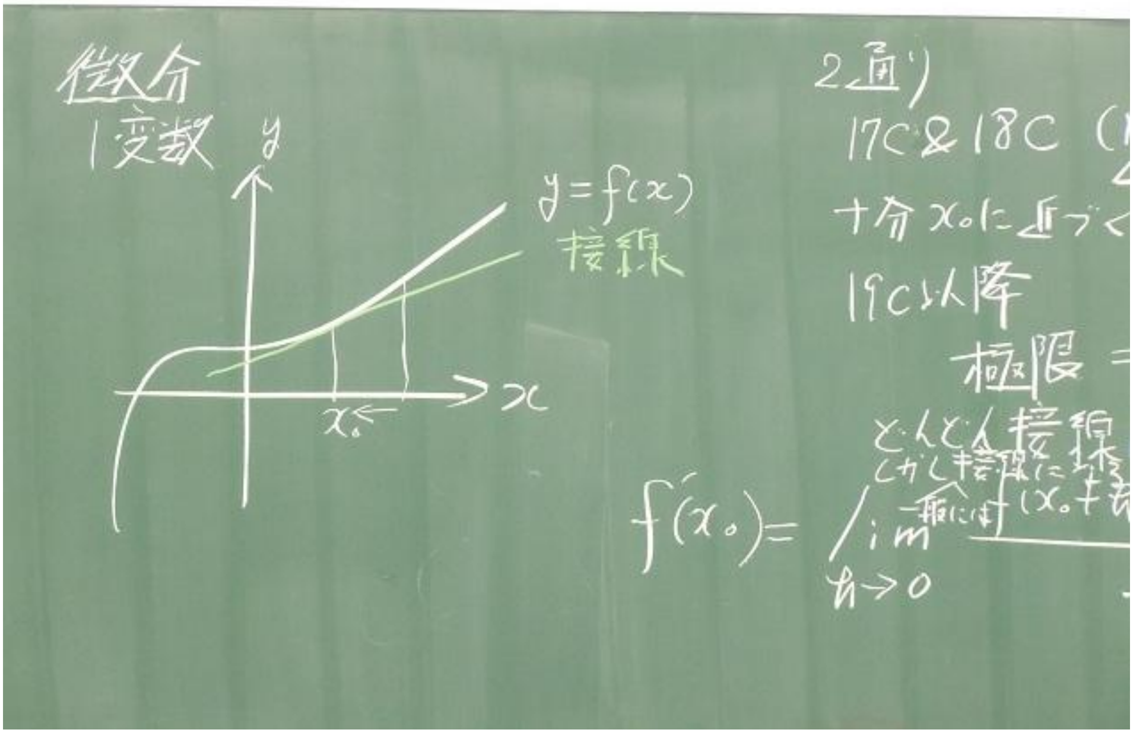
接平面

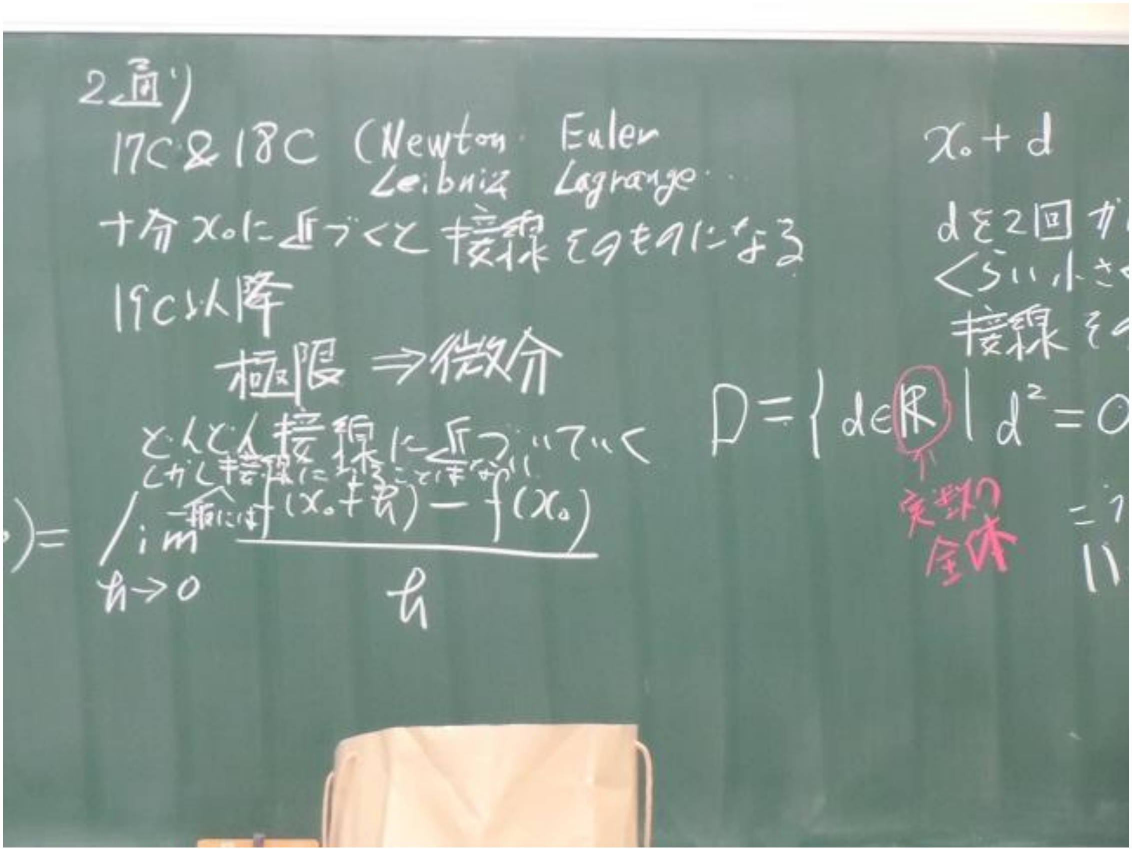
$\Delta z = \alpha \Delta x + \beta \Delta y$

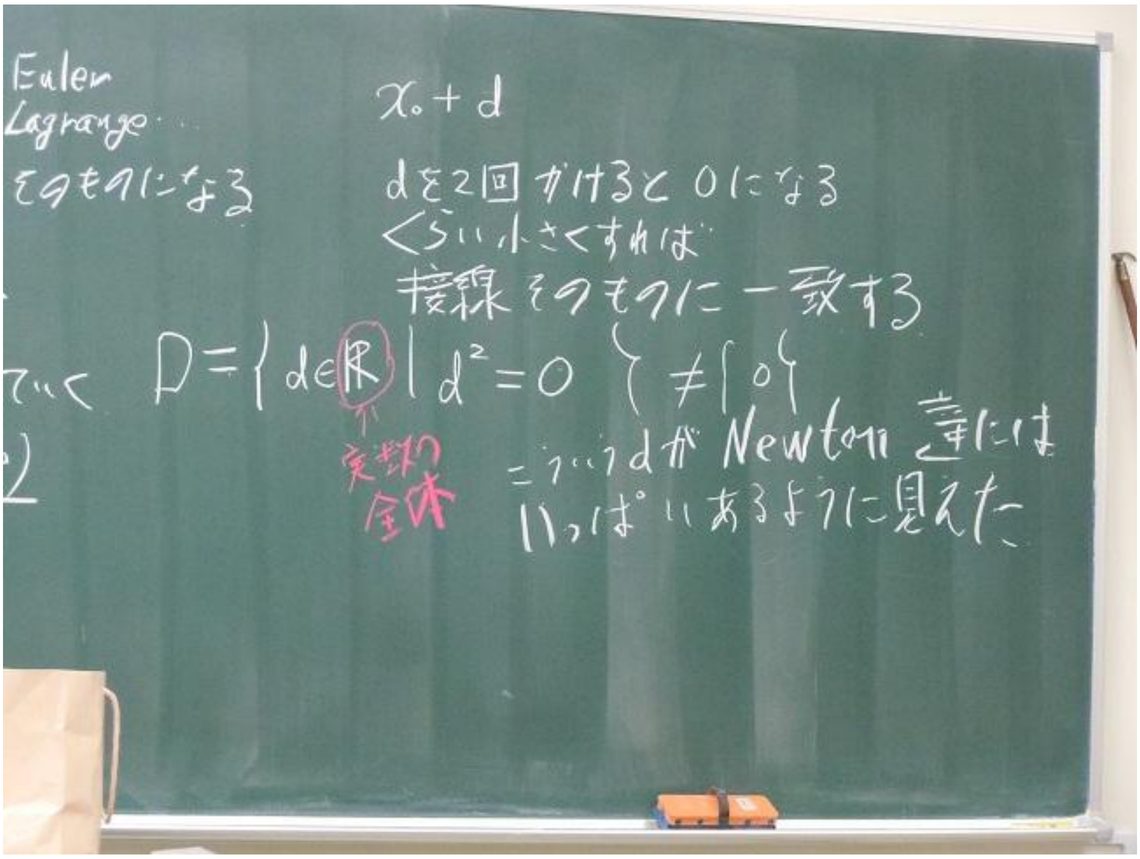
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 特別な方向

$$d \in D \longmapsto f(x_0 + a_1 d,\ y_0 + a_2 d) \in \mathbb{R}$$

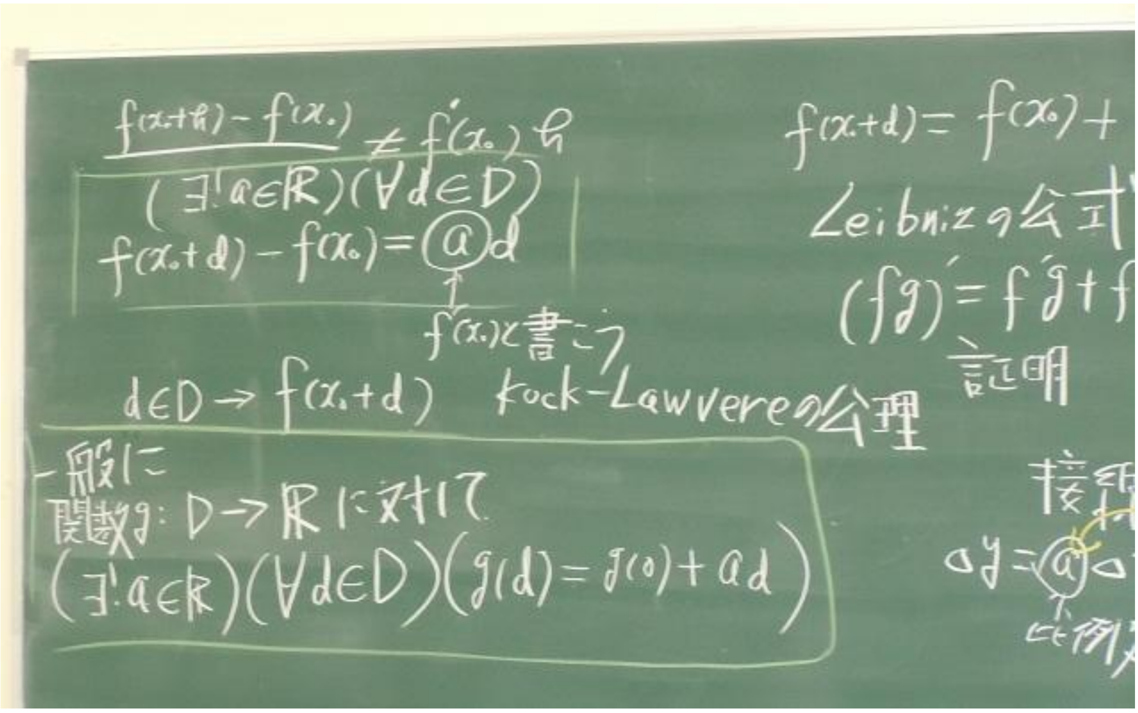
$$f(x_0 + a_1 d,\ y_0 + a_2 d) = f(x_0, y_0) + \underline{b}\, d$$


微分
1変数
y=f(x)
接線
2通り
17C&18C
19C以降
極限

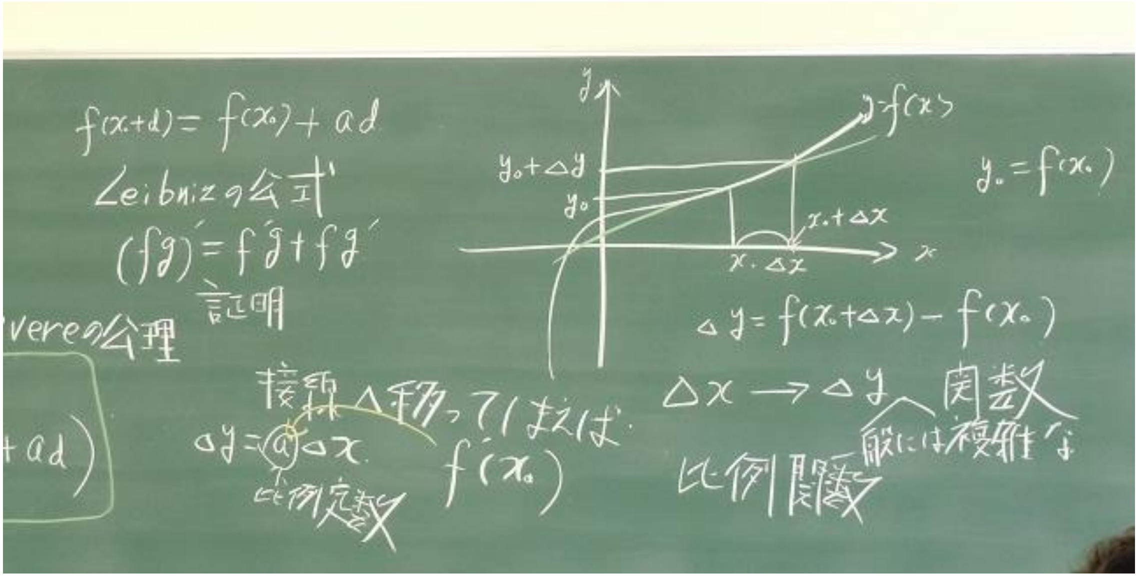

2通り
17C&18C (Newton Euler
Leibniz Lagrange…
十分x₀に近づくと接線そのものになる
19C以降
極限 ⇒ 微分
どんどん接線に近づいていく
しかし接線になることはない
一般には
x₀+d
D={d∈R | d²=0
実数の全体

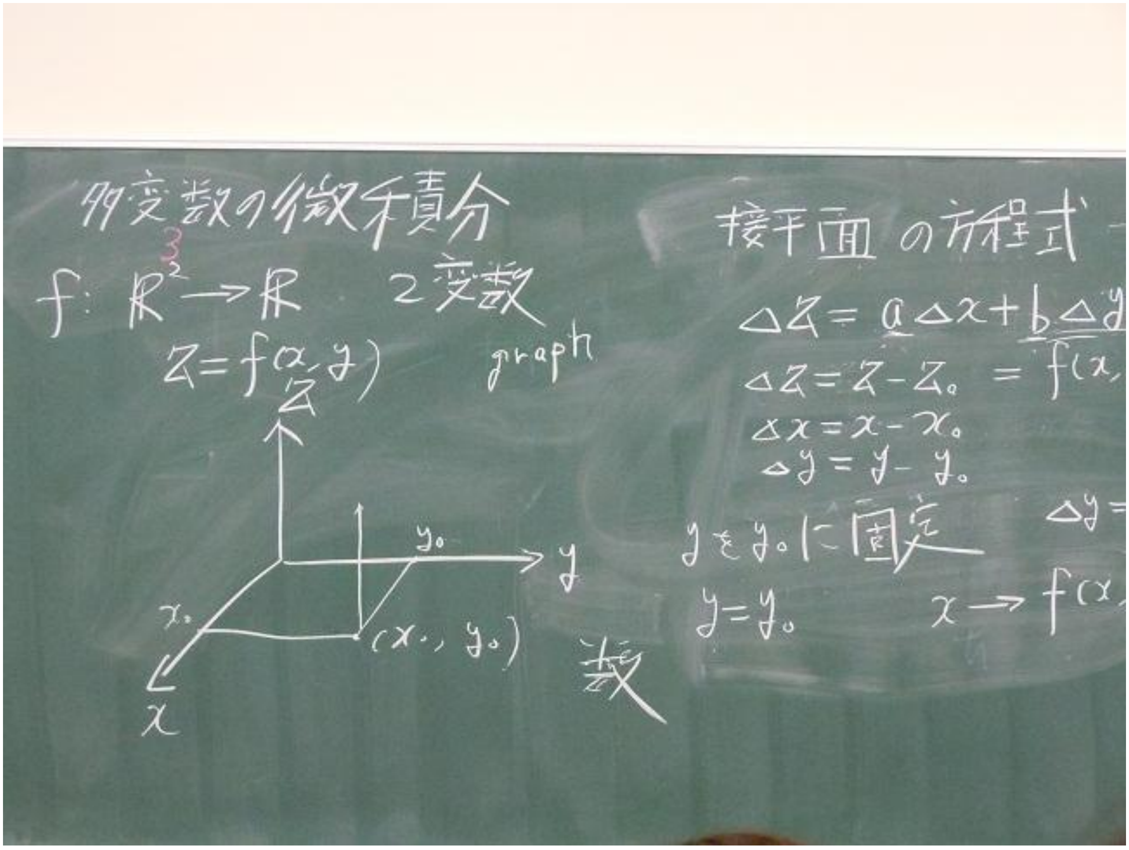


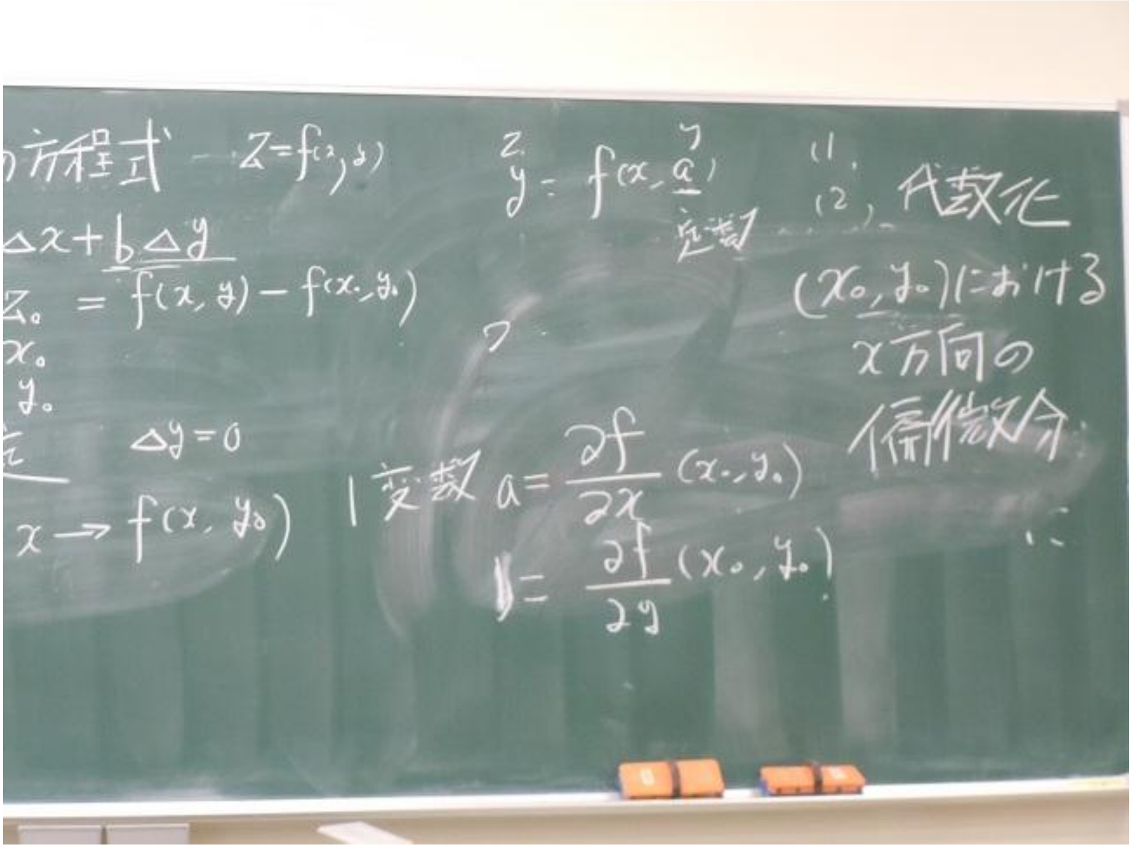
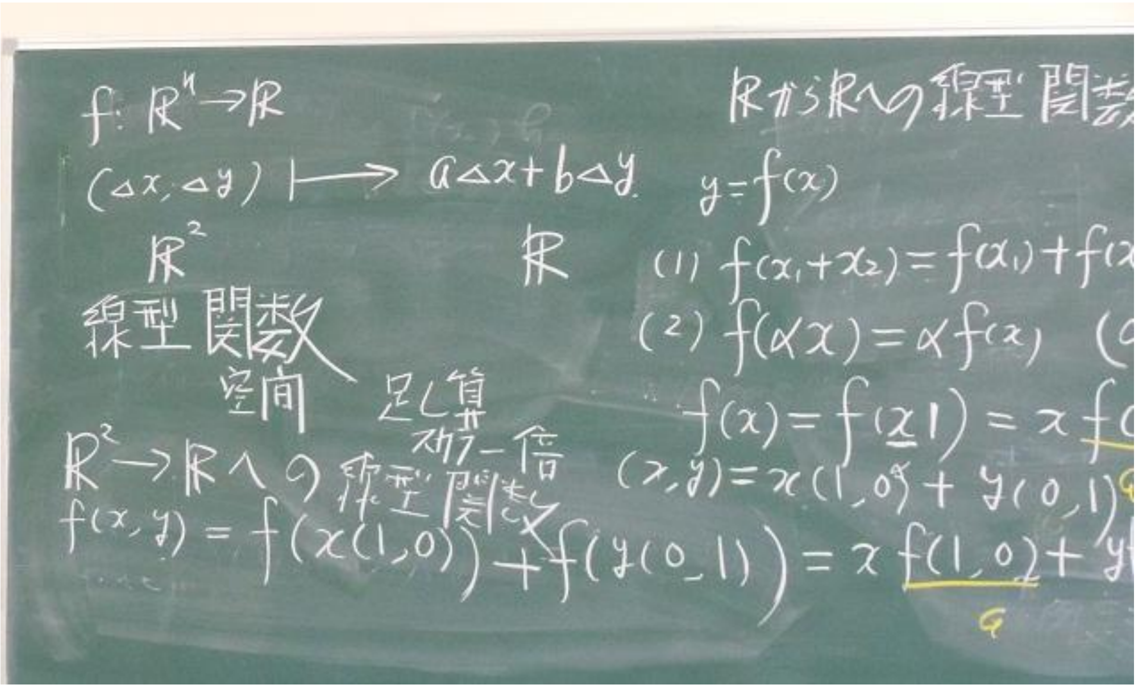
Euler
Lagrange…
そのものになる
$x_0 + d$
dを2回かけると0になる
くらい小さくすれば
接線そのものに一致する
ていく
$D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \} \neq \{0\}$
実数の全体
こういうdがNewton達には
いっぱいあるように見えた

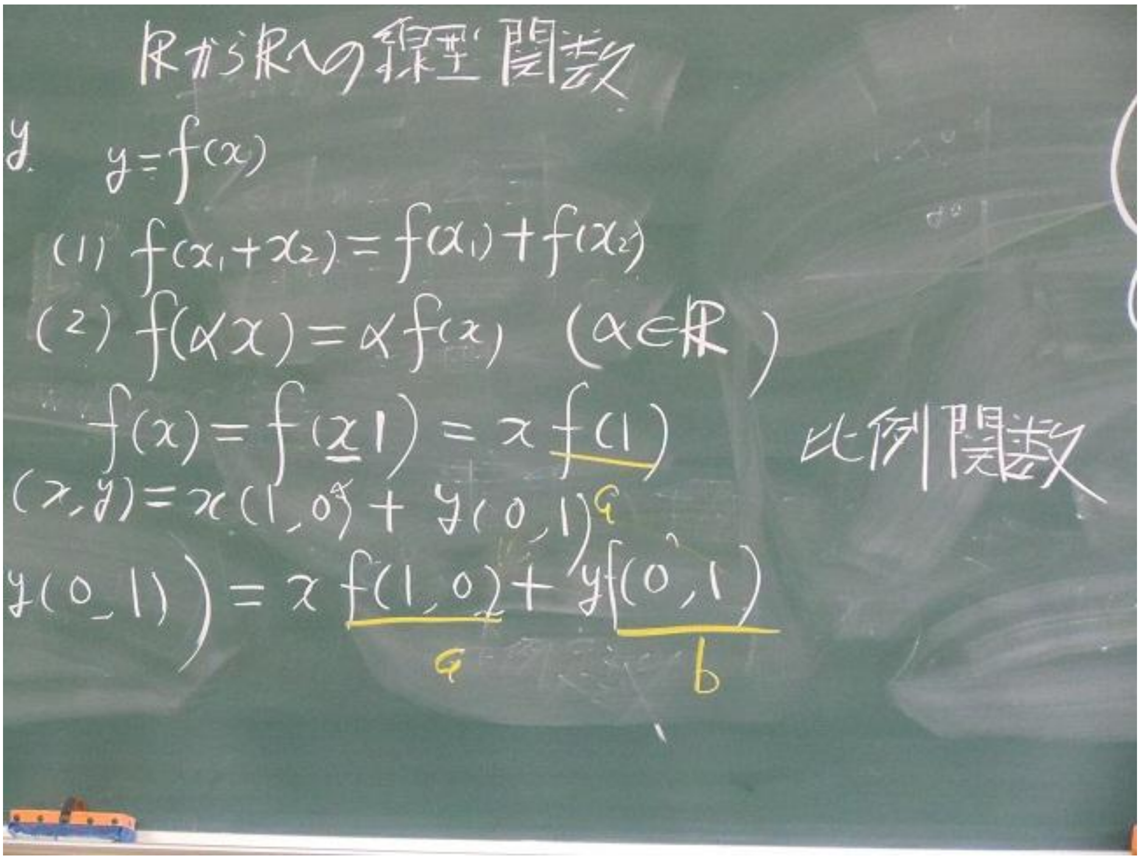


$f(x_0+h) - f(x_0) \neq f'(x_0)h$
$(\exists! a \in \mathbb{R})(\forall d \in D)$
$f(x_0+d) - f(x_0) = a d$
$f'(x_0)$と書こう
$d \in D \to f(x_0+d)$ Kock-Lawvereの公理
一般に
関数$g: D \to \mathbb{R}$に対して
$(\exists! a \in \mathbb{R})(\forall d \in D)(g(d) = g(0) + ad)$
$f(x_0+d) = f(x_0) +$
Leibnizの公式
$(fg)' = f'g + f$
証明


f(x₀+d) = f(x₀) + ad
Leibnizの公式
(fg)′ = f′g + fg′
証明
vereの公理
+ad)
接線へ移ってしまえば
Δy = ⓐΔx
比例定数
f′(x₀)
y = f(x)
y₀+Δy
y₀
x₀+Δx
x₀ Δx
y₀ = f(x₀)
Δy = f(x₀+Δx) − f(x₀)
Δx → Δy 関数
一般には複雑な
比例関数


多変数の微積分
f: R² → R 2変数
z = f(x, y)
graph
z
y₀
y
x₀
(x₀, y₀)
x
数
接平面の方程式
Δz = aΔx + bΔy
Δz = z − z₀ = f(x,
Δx = x − x₀
Δy = y − y₀
yをy₀に固定
y = y₀
x → f(x,
Δy =


方程式　z=f(x,y)
y=f(x,a)
定数
代数化
(x₀,y₀)における
x方向の
偏微分
Δy=0
x→f(x,y₀)
1変数 a=∂f/∂x (x₀,y₀)
b=∂f/∂y (x₀,y₀)

f: Rⁿ→R
RからRへの線型関数
(Δx,Δy) ⟼ aΔx+bΔy
y=f(x)
R²　R
(1) f(x₁+x₂)=f(x₁)+f(x₂)
(2) f(αx)=αf(x)
線型関数
空間
足し算
スカラー倍
f(x)=f(x1)=xf(1)
R²→Rへの線型関数
(x,y)=x(1,0)+y(0,1)
f(x,y)=f(x(1,0))+f(y(0,1))=xf(1,0)+y…
a


ℝからℝへの線型関数
$y \quad y=f(x)$
$(1)\ f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$
$(2)\ f(\alpha x)=\alpha f(x) \quad (\alpha\in\mathbb{R})$
$f(x)=f(x1)=x\,\underline{f(1)}$
比例関数
$(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$
a
$y(0,1))=x\,\underline{f(1,0)}+y\,\underline{f(0,1)}$
a
b