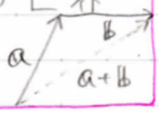
微積分

Date H22 6 23

平面ベクトルの世界
足し算
スカラー倍



2次元の列ベクトルの世界

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ 足し算

$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix}$ スカラー倍

・基底 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

$\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{a} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

平面ベクトルの全体 V^2

V^2 から V^2 への線形写像の世界

$\begin{cases} \varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b}) \\ \varphi(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\varphi(\mathbf{a}) \end{cases}$

$(\varphi+\psi)(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{a}) + \psi(\mathbf{a})$ 足し算

$(\alpha\varphi)(\mathbf{a}) = \alpha\varphi(\mathbf{a})$ スカラー倍

$(\psi \cdot \varphi)(\mathbf{a}) = \psi(\varphi(\mathbf{a}))$ 合成 — 合成写像

$\mathbf{a} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$x \longmapsto \sin x^2$

$x \longmapsto x^2$

$\psi \longmapsto \sin x$

$(\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2))$

$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) A$

$\varphi \longleftrightarrow A$

2×2の行列の世界

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$ 足し算

$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$ スカラー倍

$BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{21}a_{22} \end{pmatrix}$ 行列の積

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ は基底 fixed

平面上のベクトル $\mathbf{a} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$

$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$

$\mathbf{a}+\mathbf{b} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) + (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2)$

$= (a_1+b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2+b_2)\mathbf{e}_2$

$\alpha\mathbf{a} = \alpha(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$= (\alpha a_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha a_2)\mathbf{e}_2$

$\alpha\mathbf{a} \longleftrightarrow \alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \alpha\mathbf{a} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

$V^2 \times V^2$

$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2)$

$(\varphi(e_1), \varphi(e_2)) = (e_1, e_2)A \quad \varphi \leftrightarrow A$

$(\psi(e_1), \psi(e_2)) = (e_1, e_2)B \quad \psi \leftrightarrow B$

$$((\varphi+\psi)(e_1), (\varphi+\psi)(e_2)) = (\varphi(e_1)+\psi(e_1), \varphi(e_2)+\psi(e_2))$$
$$= (\varphi(e_1), \varphi(e_2)) + (\psi(e_1), \psi(e_2))$$
$$= (e_1, e_2)A + (e_1, e_2)B \quad \varphi+\psi \leftrightarrow A+B$$
$$= (e_1, e_2)(A+B)$$

レポート問題

e_1, e_2 は V^2 のベクトル

Ⅰ $(e_1, e_2)A + (e_1, e_2)B = (e_1, e_2)(A+B)$

Ⅱ $\varphi \leftrightarrow A \Rightarrow \alpha\varphi \leftrightarrow \alpha A$

を示せ

$$((\psi\circ\varphi)(e_1), (\psi\circ\varphi)(e_2)) = \psi(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$$
$$= \psi((e_1, e_2)A)$$
$$= (\psi(e_1), \psi(e_2))A$$
$$= ((e_1, e_2)B)A$$
$$= (e_1, e_2)(BA)$$

n 次元の線型空間

足し算
8つの公理
スカラー倍

基底 (base) n 個のベクトル

$e_1, \cdots, e_n$

V の任意のベクトル a が、$\exists!(a_1, \cdots, a_n)$

such that $a = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$ ← 2つ合わせて 基底の定義!!{(・ω・`)

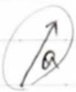
$a \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n \Rightarrow a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$

$(a_1 - b_1)e_1 + \cdots + (a_n - b_n)e_n = 0$

$c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

$e_1, \cdots, e_n$ は 線型独立、一次独立

$\alpha a = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ 

平面ベクトルの世界に戻る

$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ ← 線型従属、一次従属

$\mathbf{e}_1$と$\mathbf{e}_2$が線型独立でない

同時には0でないc_1とc_2があって、$c_1 \neq 0$

$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$

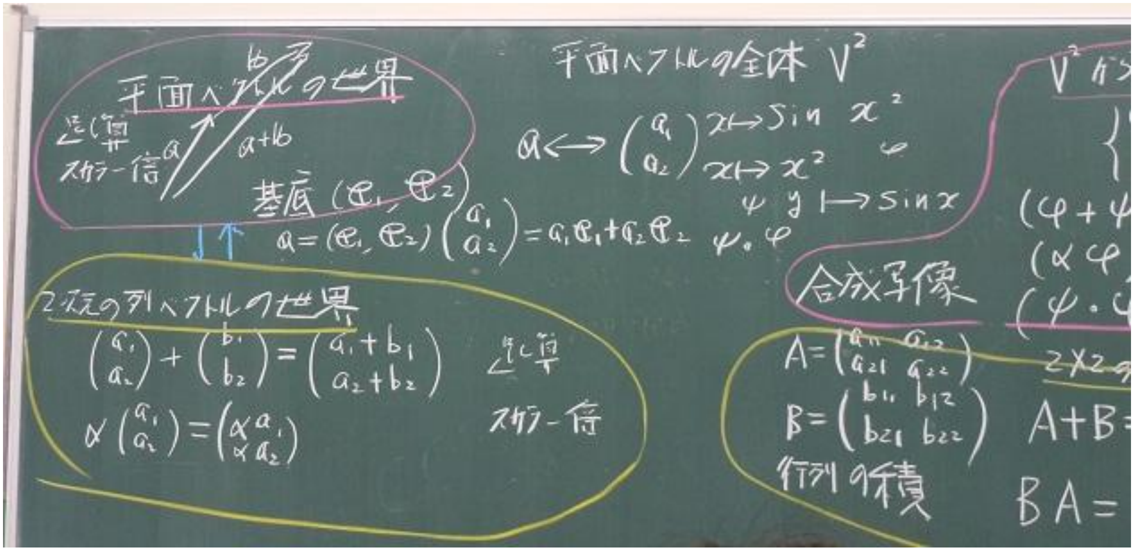
$\mathbf{e}_1 + \frac{c_2}{c_1}\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ $\mathbf{e}_1 = \frac{c_2}{c_1}\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_1$と$\mathbf{e}_2$は同一直線上にある。

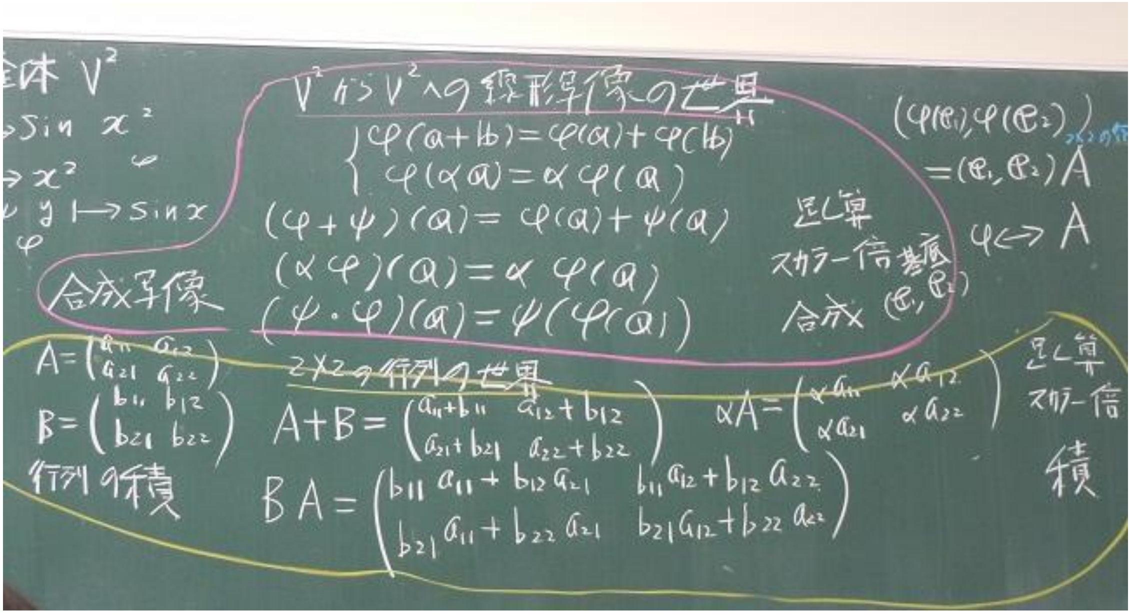
Ⅲ 空間のベクトル

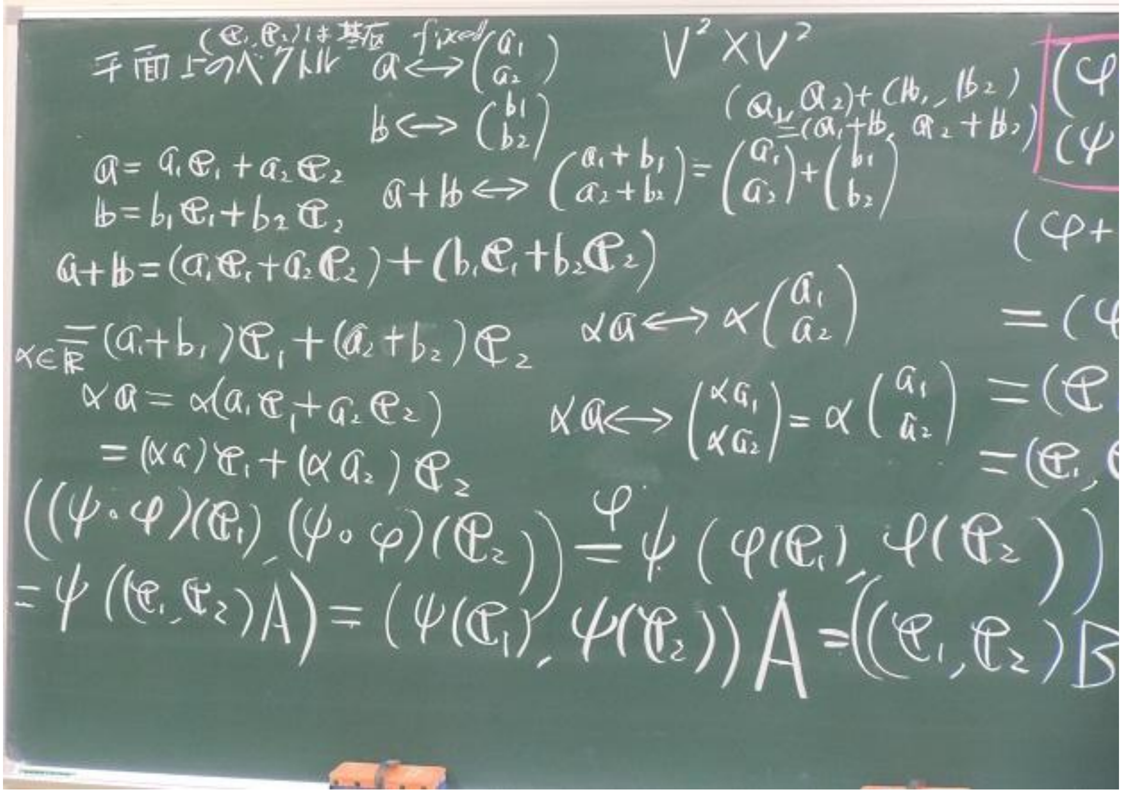
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$が1次従属

$\Updownarrow$

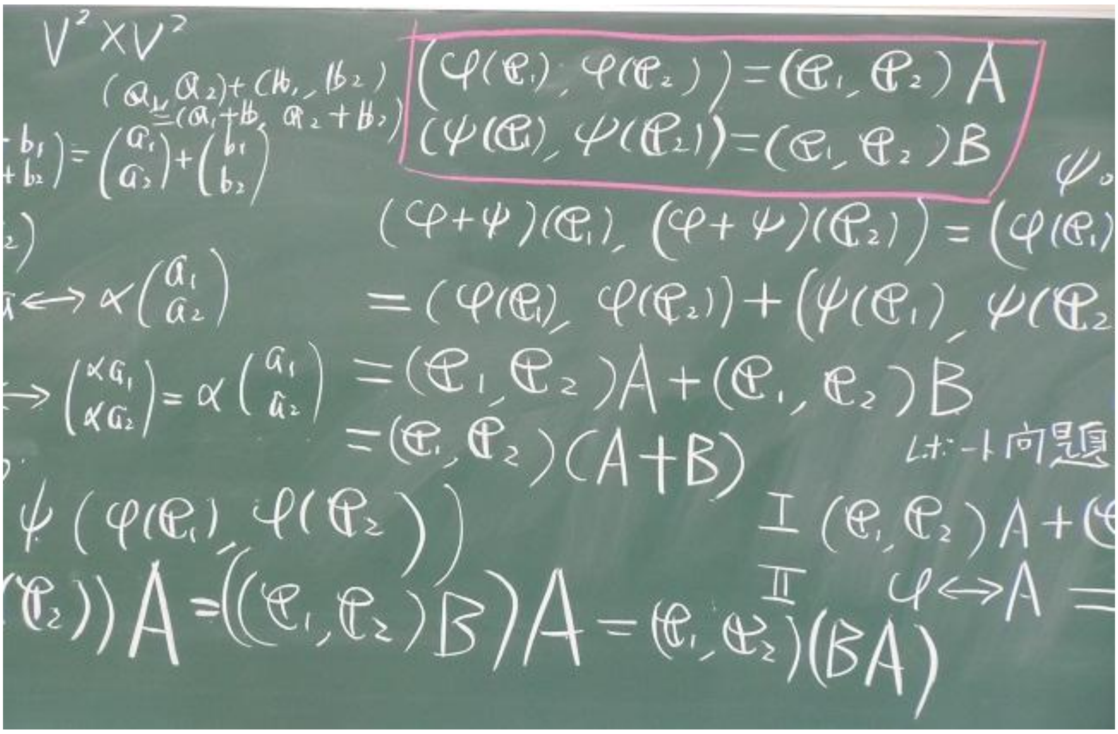
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$は同一平面上にある


平面ベクトルの世界
足し算
スカラー倍
a+b
基底 (e1, e2)
2次元の列ベクトルの世界
足し算
スカラー倍
平面ベクトルの全体 V²
x↦sin x
x↦x²
y↦sin x
合成写像
行列の積

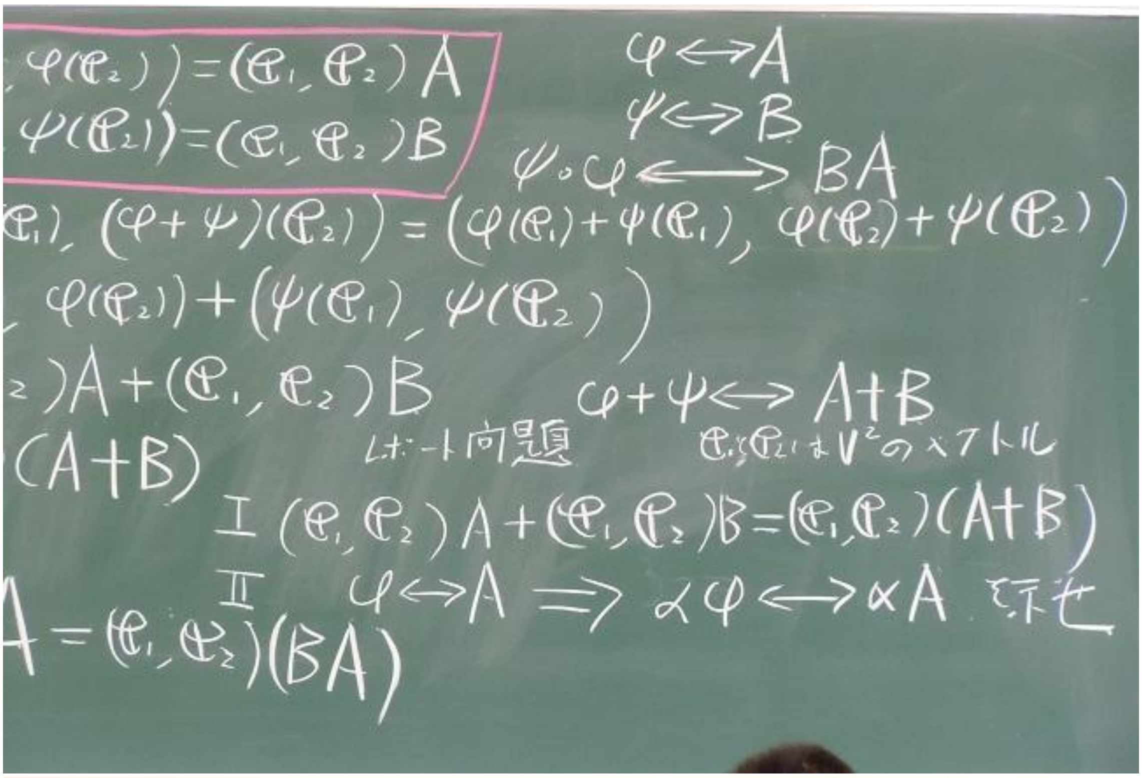

V²からV²への線形写像の世界
φ(a+b)=φ(a)+φ(b)
φ(αa)=αφ(a)
(φ+ψ)(a)=φ(a)+ψ(a)
(αφ)(a)=αφ(a)
(ψ・φ)(a)=ψ(φ(a))
足し算
スカラー倍
基底
合成
(φ(e1), φ(e2))
=(e1, e2)A
φ⟷A
合成写像
2×2の行列の世界
足し算
スカラー倍
行列の積
積

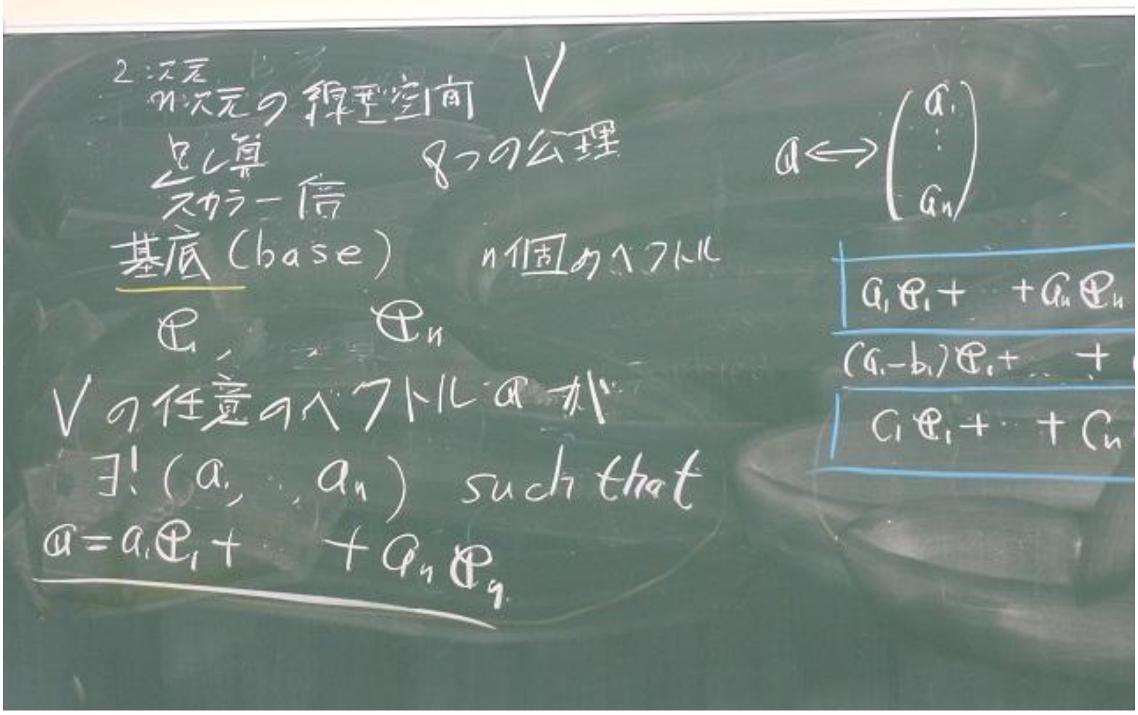


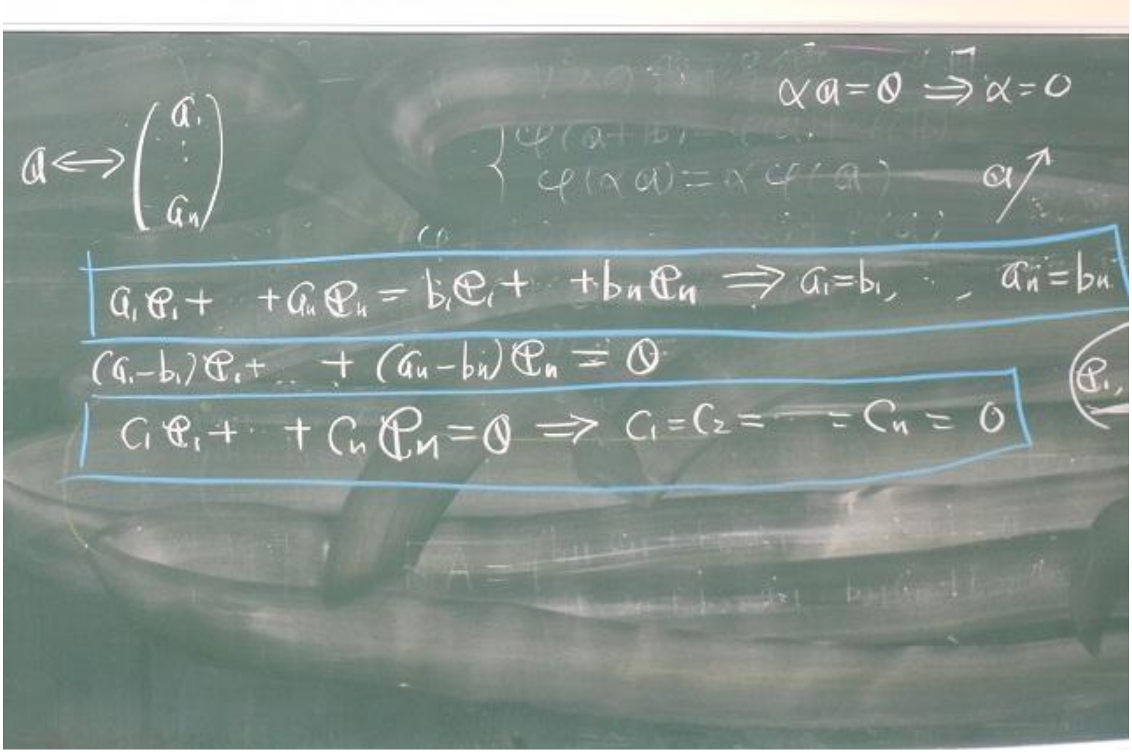
$(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)$ は基底 fixed
平面上のベクトル $\mathbb{a} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
$\mathbb{b} \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$
$V^2 \times V^2$
$(\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2) + (\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2) = (\mathbb{a}_1 + \mathbb{b}_1, \mathbb{a}_2 + \mathbb{b}_2)$
$\mathbb{a} = a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2$
$\mathbb{b} = b_1 \mathbb{e}_1 + b_2 \mathbb{e}_2$
$\mathbb{a} + \mathbb{b} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$
$\mathbb{a} + \mathbb{b} = (a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2) + (b_1 \mathbb{e}_1 + b_2 \mathbb{e}_2)$
$= (a_1 + b_1) \mathbb{e}_1 + (a_2 + b_2) \mathbb{e}_2$
$\alpha \in \mathbb{R}$
$\alpha \mathbb{a} \leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
$\alpha \mathbb{a} = \alpha (a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2)$
$= (\alpha a_1) \mathbb{e}_1 + (\alpha a_2) \mathbb{e}_2$
$\alpha \mathbb{a} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
$((\psi \circ \varphi)(\mathbb{e}_1), (\psi \circ \varphi)(\mathbb{e}_2)) \overset{\varphi}{=} \psi(\varphi(\mathbb{e}_1), \varphi(\mathbb{e}_2))$
$= \psi((\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2) A) = (\psi(\mathbb{e}_1), \psi(\mathbb{e}_2)) A = ((\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2) B$

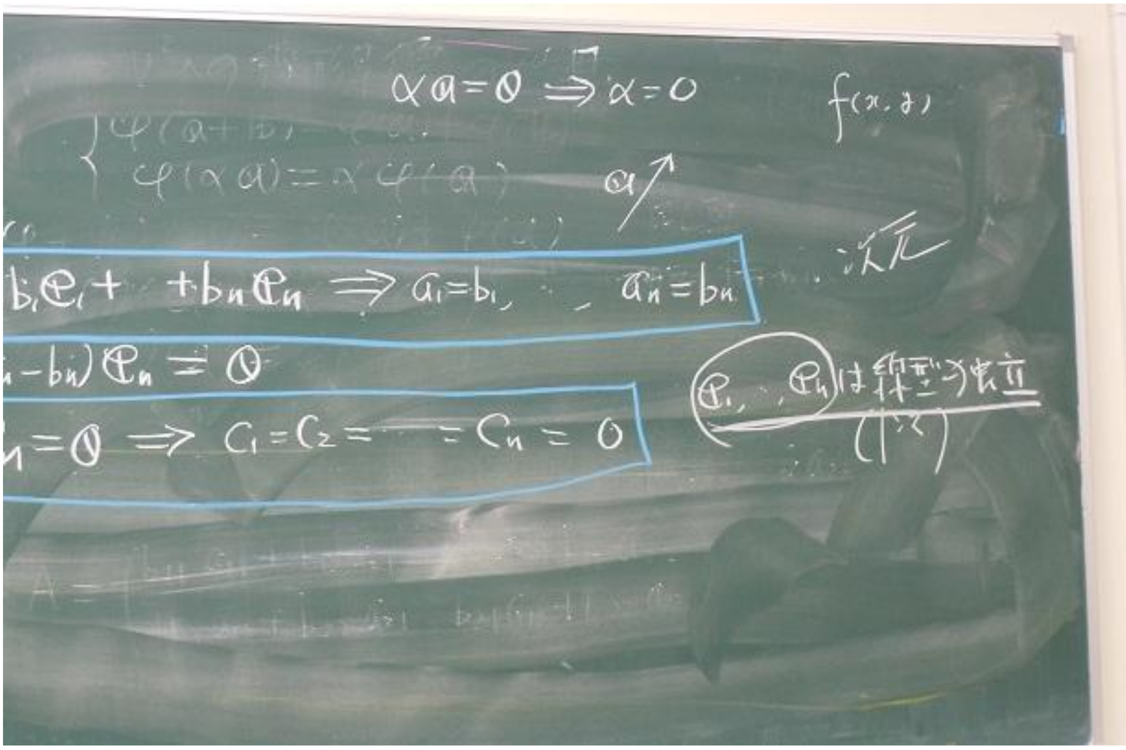


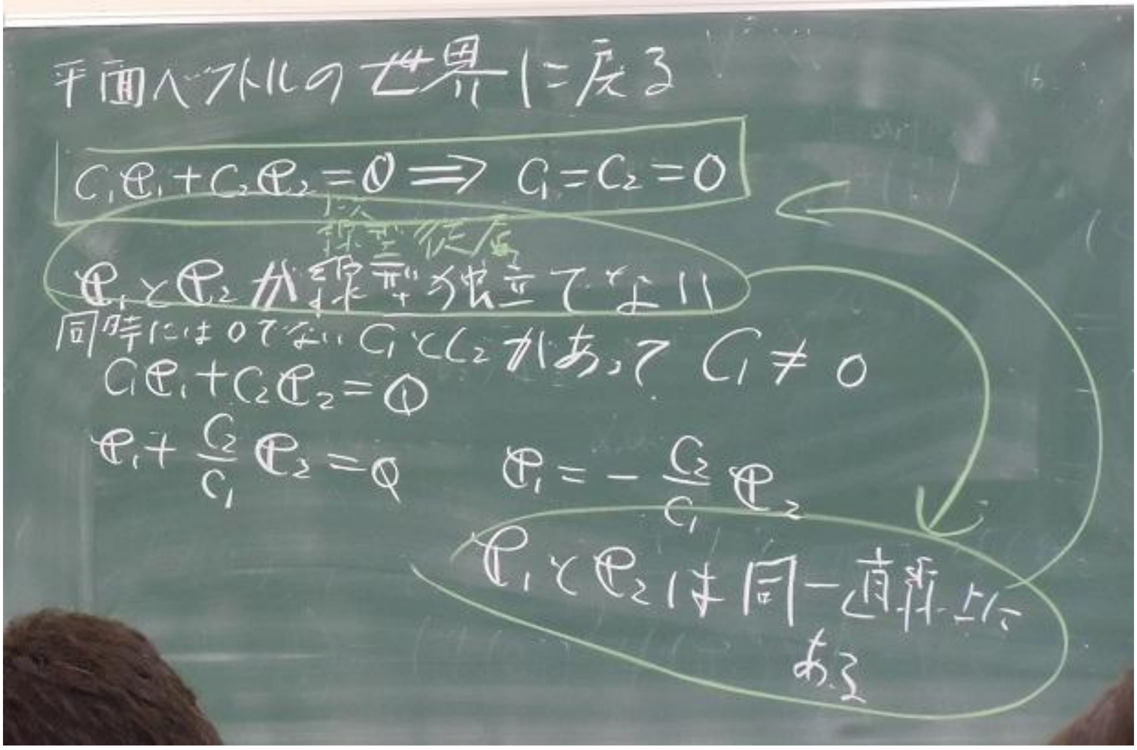
$V^2 \times V^2$
$(\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2) + (\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2) = (\mathbb{a}_1 + \mathbb{b}_1, \mathbb{a}_2 + \mathbb{b}_2)$
$(\varphi(\mathbb{e}_1), \varphi(\mathbb{e}_2)) = (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2) A$
$(\psi(\mathbb{e}_1), \psi(\mathbb{e}_2)) = (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2) B$
$((\varphi + \psi)(\mathbb{e}_1), (\varphi + \psi)(\mathbb{e}_2)) = (\varphi(\mathbb{e}_1)$
$= (\varphi(\mathbb{e}_1), \varphi(\mathbb{e}_2)) + (\psi(\mathbb{e}_1), \psi(\mathbb{e}_2$
$= (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2) A + (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2) B$
$= (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)(A + B)$
レポート問題
I $(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2) A +$
II $\varphi \leftrightarrow A =$
$\psi(\varphi(\mathbb{e}_1), \varphi(\mathbb{e}_2))$
$(\mathbb{e}_2)) A = ((\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2) B) A = (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)(BA)$

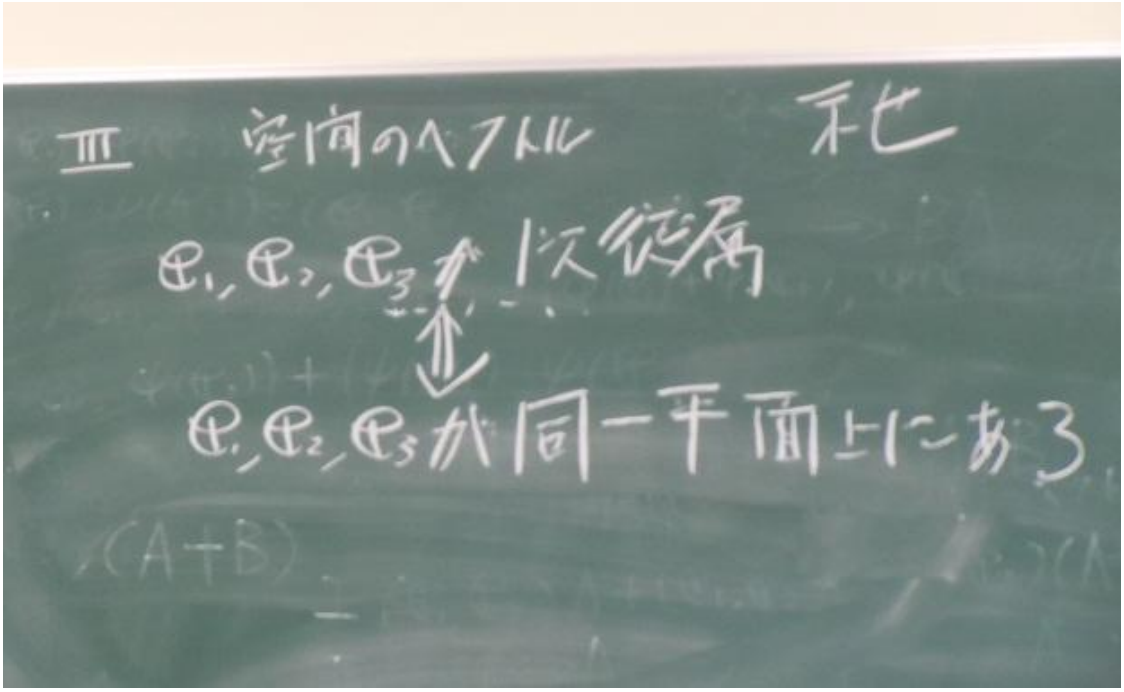

$\varphi(e_2)) = (e_1, e_2)A$
$\psi(e_2)) = (e_1, e_2)B$
$\varphi \longleftrightarrow A$
$\psi \longleftrightarrow B$
$\psi \circ \varphi \longleftrightarrow BA$
$e_1), (\varphi+\psi)(e_2)) = (\varphi(e_1)+\psi(e_1), \varphi(e_2)+\psi(e_2))$
$\varphi(e_2)) + (\psi(e_1), \psi(e_2))$
$_2)A + (e_1, e_2)B$
$\varphi+\psi \longleftrightarrow A+B$
$(A+B)$
レポート問題
e_1, e_2 は V^2 のベクトル
I $(e_1, e_2)A + (e_1, e_2)B = (e_1, e_2)(A+B)$
II $\varphi \longleftrightarrow A \Longrightarrow \alpha\varphi \longleftrightarrow \alpha A$ 示せ
$A = (e_1, e_2)(BA)$


2次元
n次元の線型空間 V
足し算
スカラー倍
8つの公理
$a \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
基底(base)
n個のベクトル
$e_1, \ldots, e_n$
Vの任意のベクトル a が
$\exists!(a_1, \ldots, a_n)$ such that
$a = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$
$a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$
$(a_1-b_1)e_1 + \cdots +$
$c_1e_1 + \cdots + c_n$


αa=0 ⇒ α=0
a ⟺ (a1 ⋮ an)
φ(αa)=αφ(a)
a1e1+ +anen = b1e1+ +bnen ⇒ a1=b1, , an=bn
(a1−b1)e1+ + (an−bn)en = 0
c1e1+ +cnen=0 ⇒ c1=c2= =cn=0


αa=0 ⇒ α=0
f(x, y)
φ(αa)=αφ(a)
次元
b1e1+ +bnen ⇒ a1=b1, , an=bn
−bn)en = 0
n=0 ⇒ c1=c2= =cn=0
e1, , enは線型独立
(1次)


平面ベクトルの世界に戻る
$c_1 e_1 + c_2 e_2 = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2 = 0$
一次従属
線型従属
e_1とe_2が線型独立でない
同時には0でないc_1とc_2があって $c_1 \neq 0$
$c_1 e_1 + c_2 e_2 = 0$
$e_1 + \frac{c_2}{c_1} e_2 = 0$
$e_1 = -\frac{c_2}{c_1} e_2$
e_1とe_2は同一直線上にある


III 空間のベクトル
e_1, e_2, e_3が1次従属
⇕
e_1, e_2, e_3が同一平面上にある