No. 9

2次形式
(2重線形写像)

$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

をとる.

$$\begin{cases} x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 \\ y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = y_1 e_1 + y_2 e_2 \end{cases}$$ として

$$f(x, y) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2)$$

中略

$$= x_1 y_1 \underbrace{f(e_1, e_1)}_{a_{11}} + x_1 y_2 \underbrace{f(e_1, e_2)}_{a_{12}}$$
$$+ x_2 y_1 \underbrace{f(e_2, e_1)}_{a_{21}} + x_2 y_2 \underbrace{f(e_2, e_2)}_{a_{22}}$$

とすると

$$f(x, y) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

2次形式 $\underset{\text{対応}}{\longleftrightarrow}$ 2×2の行列

No.

Date

2次形式の例として

- 内積 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ⇒ 対称 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$
- 行列式 $|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|$ $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ ⇒ 反対称 $|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|=-|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}|$

先ほどの $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ を A とする.

◎ 転置行列

$${}^tA=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}$$ …ij成分が a_{ji} となる

言葉の定義

- ${}^tA=A$ のとき 対称行列 という(← 2×2なら $a_{21}=a_{12}$)
- ${}^tA=-A$ のとき 反対称行列 という(たとえば 行列式は反対称行列で表される)

◎「f: 2次形式が対称」と仮定

$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$

⇓

fに対応する行列 A は対称行列

この逆の証明はレポート課題とする.
I(1)
7月6日(月) 提出

No.

Date

② 「f：2次形式が反対称」と仮定．

$f(x, y) = -f(y, x)$

$\Downarrow$

fに対応する行列Aは反対称

（※ $f(e_1, e_1) = -f(e_1, e_1)$
$\Leftrightarrow$ $2f(e_1, e_1) = 0$
$\Leftrightarrow$ $a_{11} = 0$，よって対角成分は0になる
（$a_{22} = 0$も同様））

この逆は課題 I (2) とする．

話を微分に戻します．

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ （一般）

$x \in \mathbb{R}^2$ で微分

$f'(x) = df(x)$ ：$\mathbb{R}^2$から$\mathbb{R}$への線形写像

よって $f'(x) \in L(\mathbb{R}^2 ; \mathbb{R})$

ここでxを動かす

$f' : \mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2 ; \mathbb{R})$

$f''(x) \in L(\mathbb{R}^2 ; L(\mathbb{R}^2 ; \mathbb{R}))$

$\qquad\qquad ||$

$L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 ; \mathbb{R})$ $\curvearrowright$ $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の2重線形写像

Theorem （定理） $f''(x)$は対称

No.

Date

Proof (証明)

・何を証明するかをはっきりさせておく

$$\boxed{\partial_b(\partial_a f)(x) = \partial_a(\partial_b f)(x) \quad (a, b \in \mathbb{R}^2)}$$

$$f''(x)(a, b) = df'(x)(a)(b)$$
$$= \partial_a f'(x)$$

ここで $f' : x \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (b \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \partial_b f(x))$
をみたすような写像

これを示す

$d_1, d_2 \in D$

$$f(x + d_1 a + d_2 b) - f(x + d_1 a) - f(x + d_2 b) + f(x) \quad \cdots ①$$

を2通りに計算してやる.

$$① \Leftrightarrow \{f(x + d_1 a + d_2 b) - f(x + d_1 a)\} - \{f(x + d_2 b) - f(x)\}$$

$$= \partial_b f(x + d_1 a)\, d_2 - \partial_b f(x)\, d_2$$

(今 $y \in \mathbb{R}^2 \mapsto \partial_b f(y) \in \mathbb{R}^2$ を考えて)

$$= \partial_a(\partial_b f)(x)\, d_1 d_2 \quad \cdots ②$$

No.

Date

また

$$① \Leftrightarrow \{f(x+d_1a+d_2b)-f(x+d_2b)\}-\{f(x+d_1a)-f(x)\}$$

(中略 前ページ参照)

$$= \partial_b(\partial_a f)(x)\,d_1d_2 \quad \cdots ③$$

②,③より 2階の微分は2重線形写像で表されるが
上記より 対称であることが分かった。

話を戻します

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (一般)

$f'(x): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ への線形写像

行列 (1×2)

$\Updownarrow$ 対応は簡単に求められる(偏微分すれば……)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

No.

Date

では

$f''(x)$ 対称な 2重線形 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

行列 2×2

$$f''(x)(a, b)$$

$$= (a_1 \ a_2)\begin{pmatrix} ○ & ● \\ △ & ▲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

レポート課題 II

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

記号の約束(説明)

偏微分

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$

x_2を定数とみて偏微分

・たてつづけに

x_2を定数とみて偏微分

$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \xrightarrow{\text{偏微分}} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2)$

・あるいは

x_1を定数とみて偏微分

$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2)$

もし前のレポート課題をといていれば

今、$f''(x)$: 対称 だから

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

No.

Date

◎ Taylor 展開

一度 一変数に戻ります.

Taylor 展開の考え方

$f(x)$ … 多項式であると分かっているものとする 係数を決めたい.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$a_0 = f(0)$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

$$a_1 = f'(0)$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + \cdots$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

多項式ならこれは有限

point!

多項式 ≠ $\sin x$, $\cos x$, a^x, etc

‖

制限が強い…

⇓

無限次の多項式とは?

$$(e^x)' = e^x$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

無限級数に展開できる(?)

証明は避けるが以下ではこれを認めて進めます.

No.

Date

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(-\sin x)' = -\cos x$

$(-\cos x)' = \sin x$

↓

周期性

$$\begin{cases} \sin 0 = 0 \\ \cos 0 = 1 \\ -\sin 0 = 0 \\ -\cos 0 = -1 \end{cases}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

6/24 No. 10

Taylor 展開

無限次の多項式

巾級数

$$\begin{cases} e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \\ \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \cdots \\ \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \cdots \end{cases}$$

右辺をそれぞれ $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ として

$g(-x) = -g(x)$ ：奇関数

$h(-x) = h(x)$ ：偶関数