No.

Date

No. 8 6/

◎ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear

$f(x) = ax$ （aは定数）

∴ 比例関数

◎ $f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linear

$f(\boldsymbol{x}) = a_1 x^1 + a_2 x^2 \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

（a_1, a_2は定数）

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$では 1×2の行列になるから

$$= \overset{1\times 2}{\underbrace{(a_1 \ a_2)}_{\text{比例定数}}} \overset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x^1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

線形空間 $L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$

同一視　ただし$\mathbb{R}^2$は2次元の横ベクトル.

◎ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear

$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ （縦ベクトルの場合）

$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \ f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

すると

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2)$$

$$= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2)$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \overset{2\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \overset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

また 横ベクトルの場合.

$$e_1 = (1, 0) \qquad x = (x_1, x_2)$$
$$e_2 = (0, 1)$$

$$f(e_1) = (a_{11}, a_{12})$$
$$f(e_2) = (a_{21}, a_{22})$$ とすると.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2) \\ &= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) \\ &= x_1 (a_{11} \ \ a_{12}) + x_2 (a_{21} \ \ a_{22}) \\ &= \overset{1\times 2}{(x_1 \ \ x_2)} \overset{2\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

同じ行列でも少し型がちがう点に注意.

て なんで横ベクトルで考えたのか.

$$L(\mathbb{R}^2 ; \mathbb{R}) = \underset{\downarrow}{\underline{\mathbb{R}^2}}$$

「横ベクトルと見る」のが自然だった.

$$\underset{\text{横ベクトル}}{\underset{\uparrow}{\underline{\mathbb{R}^2}}} \longrightarrow L(\mathbb{R}^2 ; \mathbb{R}) = \underset{\text{横ベクトル}}{\underset{\downarrow}{\underline{\mathbb{R}^2}}}$$

(x_1, x_2) が移った点は $(x_1 \ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \ , \ a_{12}x_1 + a_{22}x_2)$$

これを単に横ベクトルとみなして線形写像とみると.

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ と対応させる写像とも思える?

No.

Date

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

↑ —

前回：<u>2次形式</u>について解説した.

$\underset{\text{横}}{\mathbb{R}^2} \times \underset{\text{縦}}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}$　2重線形 (bilinear)

$L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$　($\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への2重線形写像の全体)

$$\| $$

$$L(\mathbb{R}^2; L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}))$$

ここに何か f という元があったとする ($f \in L(\mathbb{R}^2, L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}))$)

$$f(x) \in L(\underset{\substack{\cup\!\cup \\ y}}{\mathbb{R}^2}; \mathbb{R})$$

$$\mathbb{R} \ni \{f(x)\}(y) = B(x, y)$$

$f \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} B(x_1 + x_2, y) &= f(x_1 + x_2)(y) \\ &= f(x_1)(y) + f(x_2)(y) \\ &= B(x_1, y) + B(x_2, y) \end{aligned}$$

$$B(x, y_1 + y_2) = \underset{\substack{\cap \\ L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})}}{f(x)}(y_1 + y_2) \qquad f(x) \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} &= f(x)(y_1) + f(x)(y_2) \\ &= B(x; y_1) + B(x, y_2) \end{aligned}$$

No.

Date

同様にして

$$B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y)$$
$$B(x, \beta y) = \beta B(x, y)$$

少し抽象的にすると

$$B \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$$
$$B(x, y) \in \mathbb{R}$$

すると

f : $x \longmapsto$ $y \in \mathbb{R}^2$ に対して $B(x, y)$ を対応させる写像

とすると

$\Downarrow$ 　 $\cap$

linear $! \Rightarrow L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$

$$f(x_1 + x_2)(y) = B(x_1 + x_2, y)$$
$$= B(x_1, y) + B(x_2, y)$$
$$= f(x_1)(y) + f(x_2)(y)$$
$$= \{f(x_1) + f(x_2)\}(y)$$

よって

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

従って

$$B = L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2; \mathbb{R}) = L(\mathbb{R}^2; L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}))$$

本質的に同じもの

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$　(一般)　を考える.　「$\overset{\text{テーマ}}{}$高階の微分とは何か?」
まず2次元で様子をみよう.

$\mathbb{R}^2$の各点で微分すると.
$f'(x) \in L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$　(今まで $f'(x) = d\, f(x)$ などと表わしたりもした)

今度はxを動かす
$f': \mathbb{R}^2 \longrightarrow L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$　(一般の関数)
⇓
もう1度微分することができる.

$f''(x) \in L(\mathbb{R}^2; L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}))$ → 2次形式の空間
2階の微分は二重線形写像

1度こられ次元を落として振り返ってみる.

◎1変数
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(x) \in \underbrace{L(\mathbb{R};\mathbb{R})}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}\text{の線形写像の全体}} = \mathbb{R}$

$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$　実体は $L(\mathbb{R};\mathbb{R})$

$\underbrace{f''(x)}_{g} \in L(\mathbb{R};L(\mathbb{R};\mathbb{R})) = L(\mathbb{R},\mathbb{R};\mathbb{R})$
?
$g: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の二重線形

$$g(x,y) = g(x\cdot 1,\, y\cdot 1) = xy\cdot \underbrace{g(1,1)}_{\in\,\mathbb{R}}$$

⇐ 結局 1変数なら2回微分も数(スカラー)