No.

Date

No. 7　6/3

線形写像 (linear mapping)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear.

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot \underset{a}{\underset{\shortparallel}{f(1)}} = ax$$

(比例関数)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とすると.

$$\underline{x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n}$$

すると

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)$$

$$= \underbrace{x_1}_{\text{スカラー}} \underbrace{f(e_1)}_{\text{定ベクトル}} + \cdots + x_n f(e_n)$$

このとき

$f(e_1) \in \mathbb{R}^m$ より.

$$f(e_1) := \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \vdots \quad f(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$ とすると

$$f(e_2) := \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$$

No.

Date

$$f(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m\times n\text{の行列}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} \Rightarrow \text{出力(結果)は } m\times 1.$$

point!
線形写像は行列で表わせる

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

同じ型の行列(写像)同士ならば足し算も定義できる.
また $\alpha \in \mathbb{R}$ ならば 行列同士の掛け算も定義できそうだ.

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

> $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の linear mappings の全体を
> $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ で表すものとする

$f, g \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ とすると

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f+g)(x_1+x_2) = f(x_1+x_2) + g(x_1+x_2) \quad f, g: \text{linear}$$

$$= f(x_1) + f(x_2) + g(x_1) + g(x_2)$$

No.

Date

$$= \{f(x_1) + g(x_1)\} + \{f(x_2) + g(x_2)\}$$
$$= (f+g)(x_1) + (f+g)(x_2)$$

同様に

$$(f+g)(\alpha x) = \alpha (f+g)(x)$$

(途中はレポート課題とするので成立を確認すること)

別紙に記載.

point!!

実は

$$\boxed{「L(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^m)」 \Longleftrightarrow 「m \times n \text{ 行列の全体}」}$$

教科書のP218,219に定義が書いてあるのでこれらの重要な性質について
よく理解しておくこと

※、この定義を満たす空間を線形空間,(ベクトル空間)と呼び
mn 次元の空間である

◎ 2重線形写像 bilinear mapping

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$n=2$, $m=1$

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$f(x, y)$

$$\begin{cases} f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) \\ f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y) \end{cases}$$

x を固定して y についても同様

No.

Date

例)・内積 ($\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ で表すものとする)

symmetric

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} \qquad \text{(対称)} \quad \text{つまり } f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$$

$$(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{y}.$$

・行列式

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \ (= x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

行列式では

$$f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad \text{(反対称, 歪対称)}$$

anti symmetric

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1 \boldsymbol{e}_1 + y_2 \boldsymbol{e}_2$$

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2,\ y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2)$$

$$= f(x_1\boldsymbol{e}_1,\ y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2) + f(x_2\boldsymbol{e}_2,\ y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2)$$

$$\vdots$$

$$= x_1 y_1 \underbrace{f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)}_{a_{11}} + x_1 y_2 \underbrace{f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)}_{a_{12}} + x_2 y_1 \underbrace{f(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)}_{a_{21}} + x_2 y_2 \underbrace{f(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)}_{a_{22}}$$

定数 a_{22} とする

No.

Date

ここから　2×2 行列を作ってみる

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underset{1\times 2}{(x_1 \quad x_2)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}$$

⇒ 結果は 1×1

結論として

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の 2重線形写像は
2×2 の行列で表わせる

具体的には

内積なら $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{11} = a_{22} = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行列式なら $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = -1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$