一変数にしてみよう

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

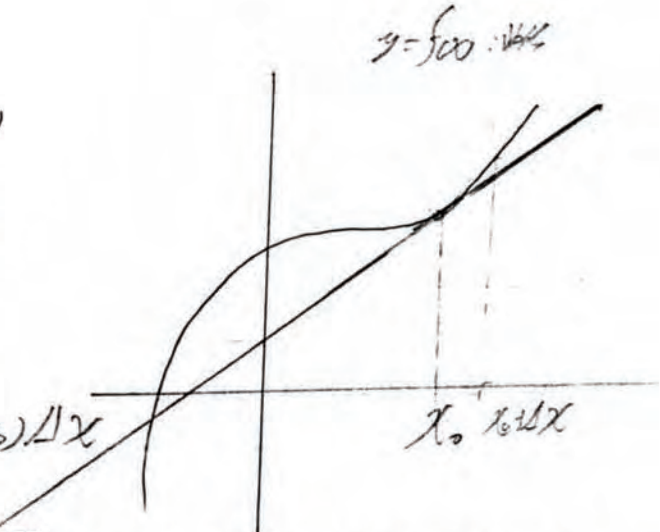
$(g\circ f)'(x_0) = \underbrace{[g'(y_0)]}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{[f'(x_0)]}_{\in\mathbb{R}}$ ⇐ つまり 1×1行列の行列同士の積としてとらえる

No. 6 5/27

x_0を固定すれば

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = g(\Delta x)$

一般には複雑



$\bar{f}(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$= \bar{f}(x_0+\Delta x) - \bar{f}(x_0) = f'(x_0)\Delta x$

$y = \bar{f}(x)$ (バーをつけて接線関数を表す)

$D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$

$\Delta x \in D$ の場合

$f(x_0+\Delta x) = \bar{f}(x_0+\Delta x)$

No.

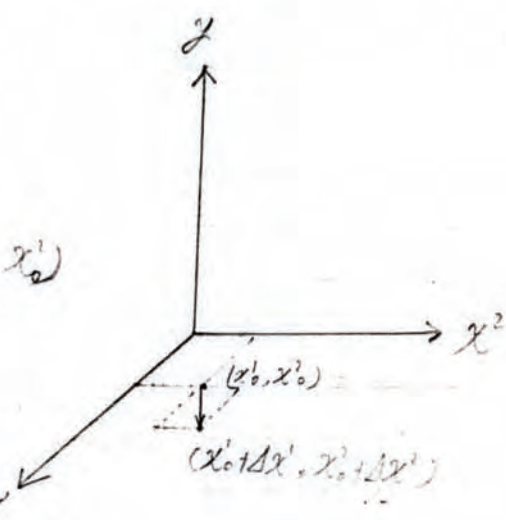
Date

$$f(x_0+d)-f(x_0) = \underset{f'(x_0)\ \text{とする}}{\underset{\parallel}{?}} \cdot d \qquad (\forall d \in D)$$

以上 一変数 微分

2変数の場合

$$y = f(x^1, x^2) \quad （曲面）$$



曲面

$$f(x_0^1+\Delta x^1, x_0^2+\Delta x^2) - f(x_0^1, x_0^2)$$

$$= g(\Delta x^1, \Delta x^1) \leftarrow \text{複雑}$$

接平面 $y = F(x^1, y^2)$

$$f(x_0^1+\Delta x^1, x_0^2+\Delta x^2) - f(x_0^1, x_0^2)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}\Delta x^1 + \frac{\partial f}{\partial y^2}\Delta x^2$$

定数
ただし $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0^1, x_0^2)$ の略.

$$a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} \text{として}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} d \quad (d \in D)$$ のところでは f と F は一致

No.

Date

$$f(x_0^1 + a^1 d,\ x_0^2 + a^2 d) - f(x_0^1, x_0^2)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^1} a^1 d + \frac{\partial f}{\partial x^2} a^2 d$$

$$= \underbrace{\left\{ \frac{\partial f}{\partial x^1} a^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} a^2 \right\}}_{\partial_a f(x_0)} d \qquad x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}$$

(x_0における a 方向の微分)

x_0 を固定して a を動かしてやる.

$$\underset{\mathbb{R}^2}{\overset{\cap}{a}} \longmapsto \partial_a f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\overset{1\times 2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2} \right)} \overset{2\times 1}{\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}} \quad : \textit{linear}$$

$$\underline{d}\, f(x_0)$$

$$\overset{\mathbb{A}}{D} = \{ d^2 = 0 \mid d \in \mathbb{R} \}$$

よってつまり

$$a \mapsto df(x_0)(a_0)$$

No.

Date

合成関数の微分.

◎ 1変数の場合

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g \circ f(x_0 + d) - g \circ f(x_0)$

$= g(f(x_0 + d)) - g(f(x_0))$

$= g(\underbrace{f(x_0) + f'(x_0) d}_{(\mathrm{cons}) \times D \ \in D}) - g(f(x_0))$

$= \underline{g(f(x_0))} + g'(f(x_0)) \times f'(x_0) d \ \underline{- g f(x_0)}$

$= \underbrace{g'(f(x_0)) \times f'(x_0)}_{\text{微分係数}} d$

◎ 多変数の場合

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

$g \circ f$ 合成関数を考える

(高校範囲は特に $n = m = l = 1$ のとき)

No.

Date

$$d(g\circ f)(x_0)(a) \quad x_0,\ a \in \mathbb{R}^n$$

$$\partial_a (g\circ f)(x_0)$$

$(\forall d \in D)$

$$g\circ f(x_0 + ad) - g\circ f(x_0) \left(= d(g\circ f)(x_0)(a)\times d \right)$$

$$\begin{cases} g\circ f(x_0+ad) = g(f(x_0+ad)) \\ \quad = g(f(x_0) + \underset{\mathbb{R}^n}{\underline{df(x_0)(a)}} \times d) \\ \quad = g(f(x_0)) + dg(f(x_0))(df(x_0)(a))\,d. \end{cases}$$

$$g\circ f(x_0+ad) - g\circ f(x_0) = dg(f(x_0))(df(x_0)(a))\,d$$

$$d(g\circ f)(x_0)(a) = dg(f(x_0))(df(x_0)(a))$$

$$a \in \mathbb{R}^n \longmapsto \underset{\mathbb{R}^n}{\underline{df(x_0)(a)}} \longrightarrow dg(f(x_0))(df(x_0)\,a)$$

その本質は

$\underbrace{dg(f(x_0))}_{g\text{の}f(x_0)\text{における微分}} \circ \underbrace{df(x_0)}_{f\text{の}x_0\text{における微分}}$ の合成である.

No.

Date

・ $df(x_0) \Rightarrow m \times n$ 行列
・ $dg(f(x_0)) \Rightarrow l \times m$ 行列

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n & (x^1, \cdots, x^n) \\ \mathbb{R}^m & (y^1, \cdots, y^m) \\ \mathbb{R}^l & (z^1, \cdots, z^l) \end{cases}$$

$$df(x_0) = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^2}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}}_{n}\right\} m$$

$$dg(f(x_0)) = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial z^1}{\partial y^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z^l}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial z^l}{\partial y^m} \end{pmatrix}}_{m}\right\} l$$

$d(g \circ f)(x_0) \Rightarrow l \times n$ の行列

$$
\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial z^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial z^1}{\partial x^n} \\
\vdots & & \vdots \\
\dfrac{\partial z^l}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial z^l}{\partial x^n}
\end{pmatrix}
$$

(i, j) 成分

$$
\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = \frac{\partial z^i}{\partial y^1} \times \frac{\partial y^1}{\partial x^j} + \frac{\partial z^i}{\partial y^2} \times \frac{\partial y^2}{\partial x^i} + \frac{\partial z^i}{\partial y^3} \times \frac{\partial y^3}{\partial x^j} + \cdots
$$

$$
\cdots + \frac{\partial z^i}{\partial y^m} \times \frac{\partial y^m}{\partial x^j}
$$

理工学 → $\begin{cases} \text{・線形代数} \\ \text{・多変数 微積分} \end{cases}$ ⇒ 偏微分の基

生物や環境系も解析は多変数にわたる。まずはconceptを身につけよう、

補足：モデル化の上手い者は無闇やたらと変数を多くしないで、重要な変数を組合わせて少ない変数で実態を表現しようとする。モデル化の工夫も大事