No.4. 5/13

(ラテン)"linearis" 「線の」

線形代数 linear algebra
(型)

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 写像

これが**線形写像**である、とは

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$

(2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$

を満たすこと.

$n = m = 1, 2$ で具体的な様子をみてみる.

(i) $n = m = 1$

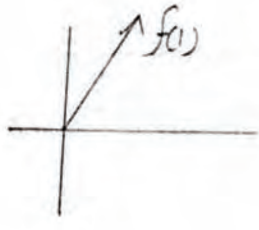
$$
\begin{aligned}
y &= f(x) \\
&= f(x \cdot 1) \\
&= x \underbrace{f(1)}_{\text{比例定数} \in \mathbb{R}}
\end{aligned}
$$

$y = ax$

比例関数 -- 1×1 行列

(ii) $n = 1$, $m = 2$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(\overset{\text{スカラー}}{x} \cdot 1) \\
&= x \, f(1) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

x：時刻とすれば 等速(直線)運動 -- 2×1 の行列

No.

Date

(iii) $n=2,\ m=1$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

  $= x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2$ これを用いて

- $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)$

  $= f(x_1\boldsymbol{e}_1) + f(x_2\boldsymbol{e}_2)$ ↓ (f: linear)

  $= x_1 \underline{f(\boldsymbol{e}_1)} + x_2 \underline{f(\boldsymbol{e}_2)}$ ↓ (同上)

  $\quad f(\boldsymbol{e}_1) \in \mathbb{R},\ f(\boldsymbol{e}_2) \in \mathbb{R} \rightarrow$ $\underline{f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2) \text{ は const.}}$

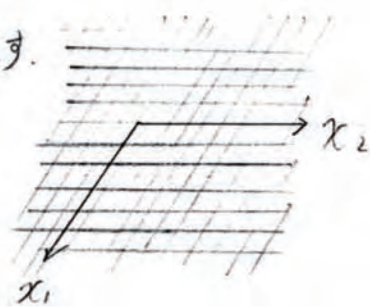
  $= a_1 x_1 + a_2 x_2$

$f(\boldsymbol{e}_1) \in \mathbb{R}^2$ でも同じ発想で

※ $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ 平面を表す.

$y = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

1×2の行列



No.

Date

(iv) $n = m = 2$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) と同様に

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2)$$

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$ とすると

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

2×2 の行列.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & n\text{列} \\ \hline m\text{行} & \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

高校まで 微分 といえば $\underset{\sim\sim\sim}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ ($\overset{\text{一般に}}{\text{非線形}}$だったけど…)
大学では $(n, m) \neq (1, 1)$ のときも扱う.

$n=1$ のとき m がいくつでも本質的には $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
これを繰返し(同時に)処理しているだけ.

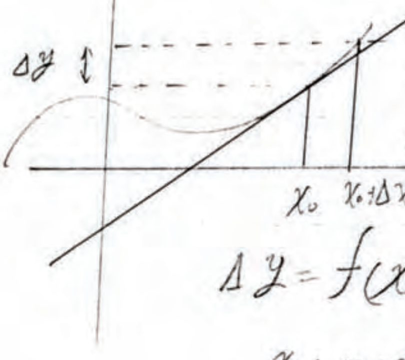
$n=2$ 以降が決定的に異なる

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (f\text{は一般の写像})$$

ex) $f(x, y) = x^2 y$ (nonlinear)

$z = x^2 y$ とする.

ここで
1変数のときを思い出してみる.



⇓
"微分する"とは
接線に置きかえること.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$\underline{x_0 : \text{const}}$

No.

Date .

Δxを変化させると Δyは変化

⇓

ただし一般に求めようとすると式が複雑・煩雑

⇓

接線に乗り換え

$$\Delta y = \underbrace{f(x_0)}_{} \times \Delta x$$

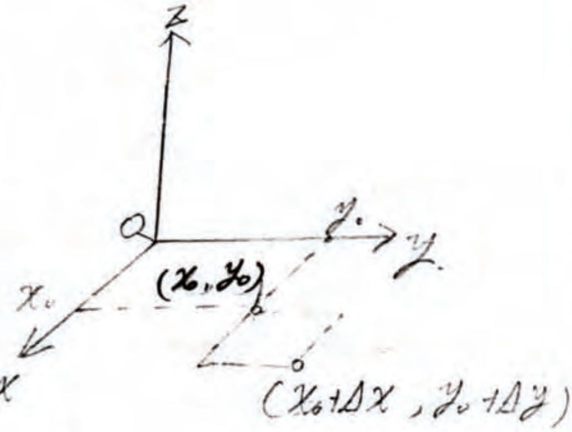
比例定数 ⟺ 傾きさえ分かれば良い!

微分とは比例定数を求めること

↓ 少し発展・拡張

微分するとは接平面を求めること

$$\Delta z = a_1 \Delta x + a_2 \Delta y$$



正確にやるなら

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

接平面に乗り換え　2つ決める

$$\Delta z = \underline{\underline{a_1}}\Delta x + \underline{\underline{a_2}}\Delta y$$

$$= a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0)$$

No.

Date

$\Delta y = 0$ として yを動かさない

$\Downarrow$

$y = y_0$ （平面）

$\downarrow$

$y = y_0$ 上に $z = f(x, y)$ は $\underbrace{\text{曲線}}_{\Downarrow}$ として表される

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ へ落ちる

平面で切ることで
曲面 → 曲線
接平面 → 接線　にできる. 高校の立場をとれば

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$= \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}$$

「fのx方向の((x₀,y₀)における)偏微分」と読もう.

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

（fのy方向の偏微分）

No.

Date.

まとめ

$z = f(x, y)$ の 点 (x_0, y_0) での接平面を求める手順

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ を求める.

(2) $$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$(z_0 = f(x_0, y_0))$

((x_0, y_0) における接平面)

Report

接平面式を求めよ.

I

(1) $z = x^3 + 3xy + y^3$

(2) $z = e^{xy}\cos(x + 2y)$

(3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

次の課題につづく…