No.

Date

$\det(tE - A)$

$\det(tE - PAP^{-1})$

$= \det P(tE - A)P^{-1}$

$= \{\det P\}\{\det(tE - A)\}\{\det P^{-1}\}$

$= \det(tE - A)$

よって合同な行列では det が等しい

ここで先の3グループの行列式を考えると

$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \Rightarrow (t-\lambda)(t-\mu)$

$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow (t-\lambda)^2$

$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \Rightarrow (t-a)^2 + b^2$

$\det(tE - A) = 0$ を計算した際に
t が実数解 特に二解分離の場合 $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$

No. 10　2/17

report 締切 3月1日（月）

線型微分方程式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ とすると

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

$$A = \overset{\text{I型}}{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}} \quad \overset{\text{II型}}{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}} \quad \overset{\text{III型}}{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$ 一般解

$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ は $t=0$ の時の初期条件として定まる.

（I型）$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

（II型）$$e^{At} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$$

（III型）$$e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

No.
Date

一般の行列 A に対しては 先のI〜III型の行列 B を考える
B が何型であるかは 前回の様に固有方程式の解の個数
を調べれば良い

$\Downarrow$

問題は次を満たす P をどう探すか

$$A = PBP^{-1}$$

$$e^{At} = P e^{Bt} P^{-1}$$

例) 以下を解け

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left| tE - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right|$$ (固有方程式)

$$= \begin{vmatrix} t+1 & 0 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t+1)(t-2)$$ 分離 2解

$\Downarrow$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

P, P^{-1} が分かっていれば

$$P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

No.
Date

少なくとも $x(y)$ は e^{-t}, e^{2t} の線型和に書けることは間違いない。

$$\begin{cases} x = c_{11} e^{-t} + c_{12} e^{2t} \\ y = c_{21} e^{-t} + c_{22} e^{2t} \end{cases} \quad c_{ij}：未知の定数$$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = x + 2y \end{cases}$$ を満たすから x', y' を計算して

$$\begin{cases} x' = -c_{11} e^{-t} + 2c_{12} e^{2t} \\ y' = -c_{21} e^{-t} + 2c_{22} e^{2t} \end{cases}$$ より

$$\boxed{\begin{aligned} -c_{11} e^{-t} + 2c_{12} e^{2t} &= -c_{11} e^{-t} - c_{12} e^{2t} \\ -c_{21} e^{-t} + 2c_{22} e^{2t} &= (c_{11} e^{-t} + c_{12} e^{2t}) + 2(c_{21} e^{-t} + c_{22} e^{2t}) \end{aligned}}$$

t に対して恒等

よって

- $2c_{12} = -c_{12}$ $\qquad c_{12} = 0$
- $-c_{21} = c_{11} + 2c_{21}$ $\qquad c_{11} = -3c_{21}$
- $2c_{22} = c_{12} + 2c_{22}$ $\qquad c_{12} = 0$

ここから x, y を少々書き直すと、

$$\begin{cases} x = -3c_{21} e^{-t} \\ y = c_{21} e^{-t} + c_{22} e^{2t} \end{cases}$$

初期条件より

$$\begin{cases} -3c_{21} = k_1 \\ c_{21} + c_{22} = k_2 \end{cases}$$ ⇒ c_{21} と c_{22} が初期条件によって確定される

II, III 型ならば帰着すべき線型和は

$$\lambda e^{at} \cos bt + \mu e^{at} \sin bt \qquad (\text{II 型})$$

$$c_{ij} e^{\lambda t} + c_{mn} t e^{\lambda t} \qquad (\text{III 型})$$

No.

Date

Report

(1) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + y \end{cases}$ 初期条件として $\begin{cases} x(1) = 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x' = 3y \\ y' = x - 2y \end{cases}$ 〃 $\begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x \end{cases}$ 〃 $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ 〃 $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2階の微分方程式

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$$

⇓

1階の連立微分方程式に帰着させる.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -a_1 y - a_2 x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left| tE - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -a_2 & t + a_1 \end{vmatrix}$$

$$= t(t + a_1) + a_2$$

$$= \underline{t^2 + a_1 t + a_2}$$

元の式を固有方程式に読み換えできる.

No.

Date

線型座標

(f_1, f_2) (g_1, g_2)

$$\begin{cases} f_1 = g_1 p_{11} + g_2 p_{21} \\ f_2 = g_1 p_{12} + g_2 p_{22} \end{cases}$$

$$[f_1 \ f_2] = [g_1 \ g_2] \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}}_{P}$$

同様に

$$[g_1 \ g_2] = [f_1 \ f_2] \underbrace{\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}}_{Q}$$

$$[f_1 \ f_2] = [f_1 \ f_2] \underbrace{QP}_{= E}$$

同様に $PQ = E$ 故 $P = Q^{-1}$, $Q = P^{-1}$

φ : 線型写像

$$\varphi(f_1) = [f_1 \ f_2] \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(f_2) = [f_1 \ f_2] \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とすると $[\varphi(f_1) \ \varphi(f_2)] = [f_1 \ f_2] A$

No.

Date

任意のベクトルは基底の線型和で書けるから

$$\varphi(x f_1 + y f_2) = x\varphi(f_1) + y\varphi(f_2)$$

$$= [\varphi(f_1)\ \varphi(f_2)]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= [f_1\ f_2]\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

なぜなら
$[g_1\ g_2] = [f_1\ f_2]Q$ かつ $Q = P^{-1}$

座標の変換

$$[\varphi(g_1)\ \ \varphi(g_2)] = [\varphi(f_1)\ \ \varphi(f_2)]\, P^{-1}$$

$$= [f_1\ f_2]\, AP^{-1}$$

$$= [g_1\ g_2]\, \underline{\underline{PAP^{-1}}}$$