No.

Date

$$f(x) = \cos(x+d)$$

$$\cos(x+d) = \cos x \cos d - \sin x \sin d$$

$$= \cos x + (-\sin x)\, d$$

$$f'(x) = -\sin x$$

指数関数

$$\boxed{e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}$$

No. 3

指数関数.

$$f(x) = 10^x$$

$f(d) = f(0) + f(0)d$ ⇐ これが存在する：Kock-Lawvere の公理

e：任意の正の実数とする.

$$g(x) = e^x$$

ここで

$e = 10^{\log_{10} e}$ より

$$g(x) = \left(10^{\log_{10} e}\right)^x$$

↓ 指数法則 $(10^a)^b = 10^{ab}$

$$= 10^{x \log_{10} e}$$

$$= f(x \log_{10} e)$$

よって

$g(d) = f(d\log_{10} e)$

d のスカラー倍はやはり D の元

$(\alpha d)^2 = \alpha^2 \times 0 = 0 \in D$

$= f(0) + f'(0)\, d\log_{10} e$

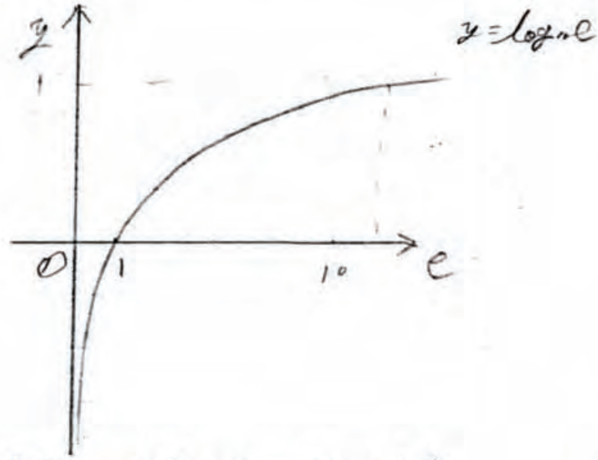
e: positive で

$y = \log_{10} e$

$y : -\infty \to \infty$ より

$\log_{10} e = \dfrac{1}{f(0)}$

となる e が存在する



↓

$g'(0) = 1$ となるような e を新たに定数として e とした

$e^{x+d} = e^x e^d$

$= e^x(1+d)$

$= e^x + d e^x$

$(e^x)' = e^x$

$= f(0) + f'(0)\, d \underbrace{\log_{10} e}_{\frac{1}{f(0)}}$

$= (10)^0 + f'(0) \times \frac{1}{f(0)} \times d$

$= 1 + d$

No.

Date

◎ 多変数の関数

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ （高校まで）

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ （大学）

（m, n：自然数）

(i) $n=1$の場合　（ほとんど高校範囲のもの）

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_1(x+d) &= f_1(x) + f_1'(x)d \\ f_2(x+d) &= f_2(x) + f_2'(x)d \\ &\ \ \vdots \\ f_m(x+d) &= f_m(x) + f_m'(x)d \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$f(x+d) = f(x) + \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix} d$$

No.

Date.

(ii) $n \neq 1$ の場合

(ii-α) $n=2$ のとき

向きを決めた

$x, a \in \mathbb{R}^n$

$$d \in D \mapsto f(x+ad) \in \mathbb{R}^m$$

$$f(x+ad) = f(x) + \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{\boxed{\partial_a f(x)}}} d$$

「f の x における a 方向の微分」と読む

a の代りに αa $(\alpha \in \mathbb{R})$

◎ a の代りに αa $(\alpha \in \mathbb{R})$

$$f(x + \alpha a d) = f(x) + \partial_{\alpha a} f(x) d$$

$\alpha d \in D$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ より

$$= f(x) + \partial_a f(x) \alpha d$$

結論

$$\partial_{\alpha a} f(x) = \alpha \partial_a f(x)$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ はくくり出せる.

No.

Date

◎ aの代わり a_1+a_2 のとき

$$f(x+(a_1+a_2)d) = f(x) + \partial_{a_1+a_2} f(x)\, d$$

$$\shortparallel$$

$$f(\underline{x+a_1 d}+a_2 d)$$

$$\in \mathbb{R}^n$$

$$= f(x+a_1 d) + \boxed{\partial_{a_2} f(x+a_1 d)}\, d$$

$$= f(x) + \partial_{a_1} f(x)\, d + \partial_{a_2} f(x)\, d + \underbrace{(\partial_{a_2}(\partial_{a_1} f(x))\underbrace{d)\, d}_{d^2=0}}_{\text{canceled}}$$

$$= f(x) + \{\partial_{a_1} f(x) + \partial_{a_2} f(x)\}\, d$$

故に

$$\partial_{a_1+a_2} f(x) = \partial_{a_1} f(x) + \partial_{a_2} f(x)$$

No.

Date

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha a) = \alpha f(a) \\ f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) \end{array}\right\}$$ このとき f を線型写像という

$n = m = 1$ の場合

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= f(x \cdot 1) \quad \text{今 } x \in \mathbb{R} \text{ より} \\ &= x \underbrace{f(1)}_{a\ (\text{定数})} \\ &= a x \end{aligned}$$

拡縮 → 傾きで決まる

(ところで 微分の基本的考え方

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \overset{\text{const.}}{f'(x)} \cdot \Delta x.$$

一般の2次平面上の曲線 $y = f(x)$ の y の変化量 Δy を接線近似を行うことで比例関数(関係)にもちこめるのが大きな利点。)

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (線形)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2 \quad \left(\begin{array}{l} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x e_1 + y e_2) \\ &= f(x e_1) + f(y e_1) \end{aligned}$$

No.

Date

つづき $f(\boldsymbol{x}) = x f(\boldsymbol{e}_1) + y f(\boldsymbol{e}_2)$.

$a = f(\boldsymbol{e}_1)$
$b = f(\boldsymbol{e}_2)$ $\left(f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ より} \atop a, b \in \mathbb{R} \right)$

$= ax + by$.

($z = ax + by$ とすれば、これは平面を示すのが見やすい?)

⇓

接平面 ⇒ a と b だけ分かればいい.

微分の基本的な発想

「曲がっているものは平らにしたい」

真っ直 = 線形.

◎ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ------ graph に描けない.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{x}) + \partial_a f(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{d}$ より

$\boldsymbol{x}$ を固定

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \longmapsto \partial_a f(\boldsymbol{x}) = \mathbb{d} f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}$

$d \in D$ ではない, 別モノの数.
$d \in D$ との混同を避けるため今は
$\mathbb{d}$ と表記する

$\mathbb{d} f(\boldsymbol{x})$ は線形 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

↑

f の $\boldsymbol{x}$ における微分