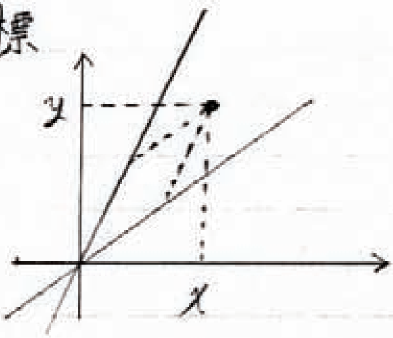
行列の合同

$$A \sim B \overset{def}{\Longleftrightarrow} \text{正則行列 } P \text{ として } B = PAP^{-1}$$

座標



$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$= x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

$\mathbb{R}^2$平面上の任意の点は(x, y)の一通りの組と対応している

⇓

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$でなくても良いのではないか?

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} + \mu\underbrace{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}_{\text{とか}}$$

これらを基底ベクトルという。

$\mathbf{f}_1$と$\mathbf{f}_2$が1次独立 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbf{f}_1$と$\mathbf{f}_2$が同一直線上にない。

座標の変換

基底の取り換え

$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \to (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{12}\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{g}_2 = a_{21}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 \end{cases}$$

$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) \to (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = b_{11}\mathbf{g}_1 + b_{12}\mathbf{g}_2 \\ \mathbf{f}_2 = b_{21}\mathbf{g}_1 + b_{22}\mathbf{g}_2 \end{cases}$$

すると

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = b_{11}(a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{12}\mathbf{f}_2) + b_{12}(a_{21}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2) \\ \mathbf{f}_2 = b_{21}(a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{12}\mathbf{f}_2) + b_{22}(a_{21}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{f}_1 = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})\mathbf{f}_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_2 = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})\mathbf{f}_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})\mathbf{f}_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = BA = E$$

基底の変換

No 9　2/10

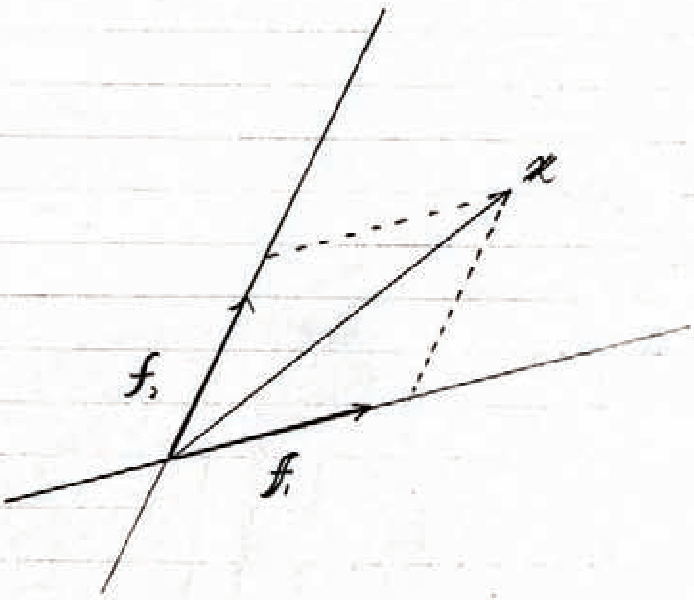
線型座標

平面

直交座標

$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$

同一直線上にない2つのベクトルの組



$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ⇒ $\mathbf{x}$の座標は(a_1, a_2)

No.

Date

直交座標とは特に
$$|\boldsymbol{f}_1| = |\boldsymbol{f}_2| = 1 \quad かつ \quad \boldsymbol{f}_1 \perp \boldsymbol{f}_2$$
な場合を指す　　　　　　　(直交)

座標の変換

$\boldsymbol{f}$ とは異なる別のベクトル $\boldsymbol{g}$ を考える

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_1 = P_{11}\boldsymbol{f}_1 + P_{12}\boldsymbol{f}_2 \\ \boldsymbol{g}_2 = P_{21}\boldsymbol{f}_1 + P_{22}\boldsymbol{f}_2 \end{cases} \qquad P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22} \in \mathbb{R}$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$ (2×2 行列) とする

また立場を変えて $\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{g}$ を考えると

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = g_{11}\boldsymbol{g}_1 + g_{12}\boldsymbol{g}_2 \\ \boldsymbol{f}_2 = g_{21}\boldsymbol{g}_1 + g_{22}\boldsymbol{g}_2 \end{cases}$$

$$Q = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

前回の話から

$$PQ = QP = E$$ (単位行列)

つまり
$$Q = P^{-1}, \quad P = Q^{-1}$$

No.

Date

線型写像

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y}) \\ \varphi(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2$$

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2)$$

$$= x_1\varphi(\boldsymbol{f}_1) + x_2\varphi(\boldsymbol{f}_2)$$

$$\begin{cases} \varphi(\boldsymbol{f}_1) = a_{11}\boldsymbol{f}_1 + a_{21}\boldsymbol{f}_2 \\ \varphi(\boldsymbol{f}_2) = a_{12}\boldsymbol{f}_1 + a_{22}\boldsymbol{f}_2. \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ これを用意して更に変形すると

$$= x_1(a_{11}\boldsymbol{f}_1 + a_{21}\boldsymbol{f}_2) + x_2(a_{12}\boldsymbol{f}_1 + a_{22}\boldsymbol{f}_2)$$

$$= (x_1a_{11} + x_2a_{12})\boldsymbol{f}_1 + (x_1a_{21} + x_2a_{22})\boldsymbol{f}_2$$

つまり $\varphi(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ の座標は

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ で与えることができる

線型座標を固定すると線型写像 φ は 2×2 の行列 A で表わすことができる
逆に 2×2 の行列 A で表わされる変換は線型写像である.

φ

(f_1, f_2)という線型座標を固定するとAという行列

(g_1, g_2) 〃 Bという行列が求まる

AとBの関係は?

$$x = y_1 g_1 + y_2 g_2$$

$$= y_1(P_{11} f_1 + P_{12} f_2) + y_2(P_{21} f_1 + P_{22} f_2)$$

$$= (y_1 P_{11} + y_2 P_{21}) f_1 + (y_1 P_{12} + y_2 P_{22}) f_2$$

$$\varphi(x) = \varphi(\{y_1 P_{11} + y_2 P_{21}\} f_1 + \{y_1 P_{12} + y_2 P_{22}\} f_2)$$

$$= (y_1 P_{11} + y_2 P_{21}) \varphi(f_1) + (y_1 P_{12} + y_2 P_{22}) \varphi(f_2)$$

$$= (y_1 P_{11} + y_2 P_{21})(a_{11} f_1 + a_{21} f_2) + (y_1 P_{12} + y_2 P_{22})(a_{12} f_1 + a_{22} f_2)$$

$$= (a_{11} y_1 P_{11} + a_{11} y_2 P_{21} + a_{12} y_1 P_{12} + a_{12} y_2 P_{22}) f_1$$

$$+ (a_{21} y_1 P_{11} + a_{21} y_2 P_{21} + a_{22} y_1 P_{12} + a_{22} y_2 P_{22}) f_2$$

$$= (a_{11} y_1 P_{11} + a_{11} y_2 P_{21} + a_{12} y_1 P_{12} + a_{12} y_2 P_{22})(g_{11} g_1 + g_{12} g_2)$$

$$+ (a_{21} y_1 P_{11} + a_{21} y_2 P_{21} + a_{22} y_1 P_{12} + a_{22} y_2 P_{22})(g_{21} g_1 + g_{22} g_2)$$

$$= \left(\begin{array}{l} a_{11} y_1 P_{11} g_{11} + a_{11} y_2 P_{21} g_{11} + a_{12} y_1 P_{12} g_{11} + a_{12} y_2 P_{22} g_{11} \\ + a_{21} y_1 P_{11} g_{21} + a_{21} y_2 P_{21} g_{21} + a_{22} y_1 P_{12} g_{21} + a_{22} y_2 P_{22} g_{21} \end{array} \right) g_1$$

$$+ \left(\begin{array}{l} a_{11} y_1 P_{11} g_{12} + a_{11} y_2 P_{21} g_{12} + a_{12} y_1 P_{12} g_{12} + a_{12} y_2 P_{22} g_{12} \\ + a_{21} y_1 P_{11} g_{22} + a_{21} y_2 P_{21} g_{22} + a_{22} y_1 P_{12} g_{22} + a_{22} y_2 P_{22} g_{22} \end{array} \right) g_2$$

$$= ○ g_1 + ● g_2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ○ \\ ● \end{pmatrix}$$

とりあえず整理します

$$○ = y_1 \{ g_{11} (a_{11} p_{11} + a_{12} p_{12}) + g_{21} (a_{21} p_{11} + a_{22} p_{12}) \}$$
$$+ y_2 \{ g_{11} (a_{11} p_{21} + a_{12} p_{22}) + g_{21} (a_{22} p_{21} + a_{22} p_{22}) \}$$
$$= (g_{11} \ g_{21}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

同様に $● = (g_{12} \ g_{22}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$A \sim B$ とは $B = PAP^{-1}$ であれ

行列をグループ分けすると

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Aが最も簡単な形，すなわち上記のいずれかとすると

$$B = PAP^{-1}$$
$$e^{tB} = e^{tPAP^{-1}}$$
$$= P e^{tA} P^{-1}$$

これを計算すれば良い

No.

Date

$$\det(tE-A)$$

$$\det(tE-PAP^{-1})$$

$$=\det P(tE-A)P^{-1}$$

$$=\{\det P\}\{\det(tE-A)\}\{\det P^{-1}\}$$

$$=\det(tE-A)$$

よって 合同な行列では det が等しい

ここで 先の 3グループの 行列式を考えると

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix} \Rightarrow (t-\lambda)(t-\mu)$$

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{bmatrix} \Rightarrow (t-\lambda)^2$$

$$A=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix} \Rightarrow (t-a)^2+b^2$$

$\det(tE-A)=0$ を計算した際に

tが 実数解 特に 二解分離の場合 $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}$