No.

Date

行列 (2×2)

A と B について 正則行列 P が存在して

$B = PAP^{-1}$

と書けるならば

$A \sim B$ (A と B は合同である) という

$A \sim A$
$A \sim B$ $\Rightarrow B \quad A$

$A \sim B$ かつ $B \sim C \Rightarrow C = QBQ^{-1}$
$= QPAP^{-1}Q^{-1}$

合同の列に分けると全ての 2×2 行列は以下の3つのみ

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

不変量 … 例えば合同な三角形での不変量は 辺の長さや角

$\det(tE-A)$ t の2次方程式
⇓
A の固有方程式

No.
Date . .

No. 8 2/3

$$x' = ax$$
$$x = k e^{at} \quad (一般解)$$

$t=0$ とおくと $x(0) = k$ (初期条件)

$A : 2\times 2$
e^{At} $\quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$(e^{At})' = A e^{At}$$

$$\left(e^{At} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\right)' = (e^{At})' \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$
$$= A e^{At} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

これ以外の解の存在について

$$(e^{-at} x)' = -a e^{-at} x + e^{-at} x'$$
$$= -a e^{-at} x + e^{-at} ax \quad = 0$$

同じ議論を 2x2 にも使ってみる

$$\left(e^{-At} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)' = -A e^{-At} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{-At} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= -A e^{-At} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{-At} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

行列の積

行列の積が交換可能(可換)かどうかを確かめなければ O とは言えない

$$e^{-At} = E - At + \frac{1}{2!}(At)^2 - \frac{1}{3!}(At)^3 + \cdots\cdots$$

故に

$$A e^{-At} = e^{-At} A$$

よって

$$\left(e^{-At}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)' = O$$

つまり $e^{-At}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ 定ベクトル

解の存在と一意性

初期条件によって個有な解が決まること

(1) P が正則行列(逆行列が存在する)のとき

$$e^{PAP^{-1}}$$

$$= E + PAP^{-1} + \frac{1}{2!}(PAP^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(PAP^{-1})^3 + \cdots\cdots$$

$$= P e^A P^{-1}$$

$PP^{-1} = E$, $(PAP^{-1}) \times (PAP^{-1}) \times \cdots = PA^n P^{-1}$

(2) 指数法則 (復習 2学期ノートを参照)

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

左辺 $1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \cdots\cdots$

右辺 $(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots)(1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \cdots)$

No.

Date

$x^i y^j$ $(i+j=n)$ の係数を比較.

左辺

$\frac{(x+y)^n}{n!}$ の項からのみ出る

⇓

$$\frac{{}_nC_i}{n!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{1}{n!} = \frac{1}{i! \times j!}$$

右辺 x^i と y^j の積からのみ出る

$$\frac{1}{i!}x^i \times \frac{1}{j!}y^j \Rightarrow \frac{1}{i! \times j!}$$

この議論を行列にも拡張できるか?

一般に $AB \neq BA$

よって二項展開の係数は多項式の二項定理に従わない.

可換のとき ($AB = BA$ のとき)

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

である

(3) $A(-A) = (-A)A$ (可換)

$A + (-A) = O$ よって　　$e^O = E + O + \frac{1}{2!}O^2 + \cdots$

$$e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = e^O = E$$

⇓

e^A は正則行列である (逆行列 e^{-A} が存在する)

No.
Date

$$e^{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}e^{\alpha} & 0\\ 0 & e^{\beta}\end{pmatrix}$$ を前回導いた.

$$e^{\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}}$$ を今回は考えてみる.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}}_{\text{2 parameter}} + \begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+c & -(b+d)\\ b+d & a+c\end{pmatrix}$$

2 parameter
$\updownarrow$
$a+ib$ に対応

$\updownarrow$
$(a+ib)+(c+id)$ に対応

$$\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ac-bd & -ad-bc\\ ad+bc & ac+bd\end{pmatrix}$$

$$(a+ib)(c+id) = ac-bd+i(ad+bc)$$

$\Downarrow$
足し算と掛け算は対応している

$$\begin{aligned} e^{a+ib} &= e^{a}e^{ib} \\ &= e^{a}(\cos b + i\sin b) \\ &= e^{a}\cos b + ie^{a}\sin b \end{aligned}$$

$\Updownarrow$ 対応

$$\begin{pmatrix}e^{a}\cos b & -e^{a}\sin b\\ e^{a}\sin b & e^{a}\cos b\end{pmatrix} = e^{a}\begin{pmatrix}\cos b & -\sin b\\ \sin b & \cos b\end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}}$$

(4) $e^{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} = e^{a}\begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ab & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ab & 0 \end{pmatrix}$ よって 可換

$$e^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}} = \underbrace{e^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}}}_{\Downarrow} e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{a} & 0 \\ 0 & e^{a} \end{pmatrix} \underbrace{e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}}}_{?}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}^{2} = O$ (零行列)

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}} = E + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

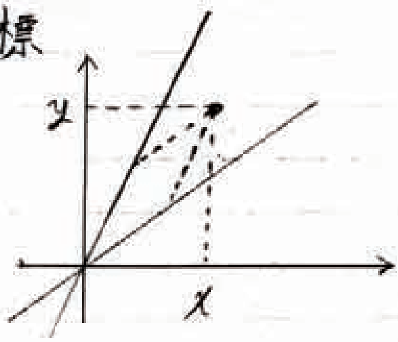
$$e^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{a} & 0 \\ 0 & e^{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{a}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

行列の合同

$$A \sim B \overset{def}{\iff} \text{正則行列 } P \text{ として } B = PAP^{-1}$$

座標



$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$= x e_1 + y e_2$$

$\mathbb{R}^2$ 平面上の任意の点は(x, y)の一通りの組と対応している

⇓

e_1, e_2 でなくても良いのではないか?

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} + \mu\underbrace{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}_{\text{とか}}$$

これらを基底ベクトルという.

f_1 と f_2 が 1次独立 $\overset{def}{\iff}$ f_1 と f_2 が 同一直線上にない.

座標の変換

基底の取り換え.

$(f_1, f_2) \to (g_1, g_2)$

$$\begin{cases} g_1 = a_{11} f_1 + a_{12} f_2 \\ g_2 = a_{21} f_1 + a_{22} f_2 \end{cases}$$

$(g_1, g_2) \to (f_1, f_2)$

$$\begin{cases} f_1 = b_{11} g_1 + b_{12} g_2 \\ f_2 = b_{21} g_1 + b_{22} g_2 \end{cases}$$

No.

Date

すると

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = b_{11}(a_{11}\boldsymbol{f}_1 + a_{12}\boldsymbol{f}_2) + b_{12}(a_{21}\boldsymbol{f}_1 + a_{22}\boldsymbol{f}_2) \\ \boldsymbol{f}_2 = b_{21}(a_{11}\boldsymbol{f}_1 + a_{12}\boldsymbol{f}_2) + b_{22}(a_{21}\boldsymbol{f}_1 + a_{22}\boldsymbol{f}_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})\boldsymbol{f}_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})\boldsymbol{f}_2 \\ \boldsymbol{f}_2 = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})\boldsymbol{f}_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})\boldsymbol{f}_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = BA = E.$$

基底の変換