$$y(d_1+d_2+d_3) = y(d_1+d_2) + y'(d_1+d_2)\,d_3$$

$$= \left\{-k_1(d_1+d_2) + k_2(1-d_1d_2)\right\} + \left\{-k_1(1-d_1d_2) - k_2(d_1+d_2)\right\}d_3$$

$$= -k_1\left\{d_1+d_2+d_3 - d_1d_2d_3\right\} + k_2\left\{1-d_1d_2-d_1d_3-d_2d_3\right\}$$

再び $d = d_1+d_2$ など に置きかえると.

$$\begin{cases} x(d) = k_1 + k_2 d \\ y(d) = -k_1 d + k_2 \end{cases} \qquad d \in D_1$$

$$\begin{cases} x(d) = k_1\left(1-\frac{d^2}{2}\right) + k_2 d \\ y(d) = -k_1 d + k_2\left(1-\frac{d^2}{2}\right) \end{cases} \qquad d \in D_2$$

$$\begin{cases} x(d) = k_1\left(1-\frac{d^2}{2!}\right) + k_2\left(d-\frac{d^3}{3!}\right) \\ y(d) = -k_1\left(d-\frac{d^3}{3!}\right) + k_2\left(1-\frac{d^2}{2}\right) \end{cases} \qquad d \in D_3$$

Report II

$x'' = -x$ について一般解を予測し、それを証明せよ

No 7. 1/27

Reportの締切は2/8(月)です

$x' = x$

増減表 $f(x)$, $f(x)' = 0$

$x' = x \gtreqless 0$ で様相がだいぶ変わる

$\underset{\uparrow\ 時間}{\overset{人口\ \swarrow}{x(t)}}$ と考えてみよう

今、		1年後
10万人	$\longrightarrow$	10万+20人
20万人	$\longrightarrow$	20万+40人
30万人	$\longrightarrow$	30万+60人

$x' = \underbrace{a}_{定数} x$

$\downarrow$

$x(t) = \cancel{k}\, e^{at}$

^{14}C 年代測定法 ‥‥ 崩壊の様子はまさに

$x' = ax \quad (a<0)$. で表される

$x(T) = \frac{1}{2} x(0)$ T: 半減期

このTが

$T = -\dfrac{\log 2}{a}$ で表されることを示せ. (Report III-(1))

Report Ⅲ (2) $x((j+1)T) = \frac{1}{2}x(jT)$

(ただしjは自然数) これを示せ.

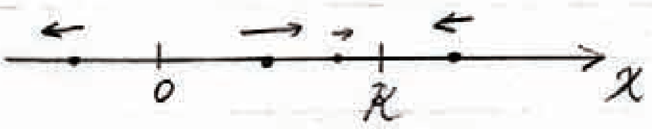
数理生態学

$x' = ax$ …… 人口が際限なく増え続けていくとは考えられない

$\downarrow$ 細工

$x' = (a-bx)x$: logistic 方程式

$\frac{a}{b} = K$



この点に収束する ⇔ 人口が飽和する点

先週の話題に関連して

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

Reportで要求したやり方とは別のやり方で1度解いてみます.

極座標の導入

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{matrix}$$

No.
Date

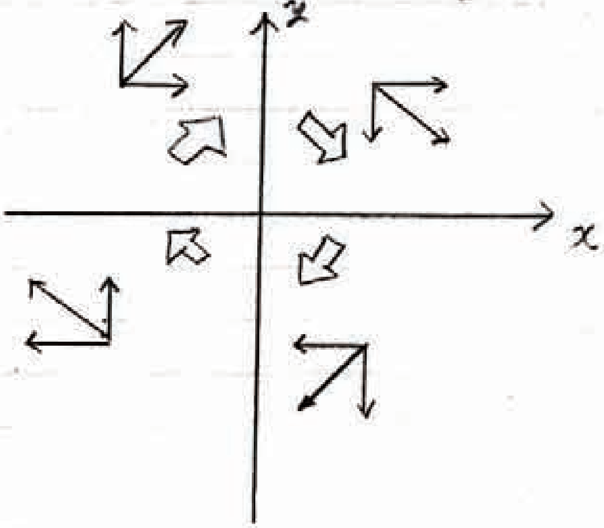
$$x' = (r\cos\theta)' = r'\cos\theta - r(\sin\theta)\theta'$$
$$= r\sin\theta$$

$$y' = (r\sin\theta)' = r'\sin\theta + r(\cos\theta)\theta'$$
$$\underbrace{= -r\cos\theta}_{\text{r'とθ'に注目すると1次の(線型)方程式}}$$

$$\begin{cases} r'\cos\theta - r(\sin\theta)\theta' = r\sin\theta \\ r'\sin\theta + r(\cos\theta)\theta' = -r\cos\theta \end{cases}$$

$r' = 0$ ⇓ 半径一定 , $\theta' = -1$ ⇓ 角速度一定

ここで再び $x' = y$, $y' = -x$ をながめて…



$x(t)$, $y(t)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underset{2\times 2}{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A : 2×2 の行列(一般)

因みに先程の微分方程式では

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ でした.

$x' = ax$ (a : const)

$x(t) = \cancel{k}e^{at}$ では

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{3!} + \cdots$$ でした.

aを行列に変えてみると?

$$e^{At} = E + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

$$(e^{At})' = A + A^2 t + A^3 \frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$= A\left(E + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots\right) = Ae^{At}$$

解けたは良いが e^{At} が具体的に何を表しているかわからない.

端的に言えば計算法がわからない

No.

Date

新たに

$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$　$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$　を考えます

$A^2=\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \beta^2\end{pmatrix}$　$A^3=\begin{pmatrix}\alpha^3 & 0\\ 0 & \beta^3\end{pmatrix}$

$$e^{At}=E+\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}t+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \beta^2\end{pmatrix}t^2+\frac{1}{3!}\begin{pmatrix}\alpha^3 & 0\\ 0 & \beta^3\end{pmatrix}t^3+\cdots$$

$$=\begin{pmatrix}1+\alpha t+\frac{1}{2!}\alpha^2t^2+\frac{1}{3!}\alpha^3t^3+\cdots & 0\\ 0 & 1+\beta t+\frac{1}{2!}\beta^2t^2+\frac{1}{3!}\beta^3t^3+\cdots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{\alpha t} & 0\\ 0 & e^{\beta t}\end{pmatrix}$$

Aが対角行列のときは少なくとも上手くいくことは分かった

対角型であれば

PAP^{-1}　（Pは正則行列（逆行列の存在する行列））

$$e^{(PAP^{-1})t}=E+PAP^{-1}t+\frac{(PAP^{-1})^2}{2!}t^2+\frac{(PAP^{-1})^3}{3!}t^3+\cdots$$

$$=Pe^{At}P^{-1}$$

つまり P, P^{-1} を上手く探して対角化された行列 A を作り出せれば計算できそうだ

No.

Date

行列 (2×2)

AとBについて 正則行列Pが存在して

$B = PAP^{-1}$

と書けるならば

$A \sim B$ (AとBは合同である) という

$A \sim A$

$A \sim B$ $\Rightarrow$ B A.

$A \sim B$ かつ $B \sim C$ $\Rightarrow$ $C = QBQ^{-1}$

$= QPAP^{-1}Q^{-1}$

合同の類に分けると全ての2×2行列は以下の3つのみ

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

不変量 … 例えば合同な三角形での不変量は辺の長さや角

$\det(tE - A)$ tの2次方程式

$\Downarrow$

Aの固有方程式