$d_{k+1} \in D$ より $d_{k+1}{}^2 = 0$

$$(d_1 + \cdots\cdots + d_k + d_{k+1})^n = \underbrace{(d_1 + \cdots + d_k)^n}_{n!\,\sigma_k^n(d_1,\ldots,d_k)} + n d_{k+1} (d_1 + \cdots + d_k)^{n-1}$$

$$= n!\,\sigma_k^n(d_1,\ldots,d_k) + n d_{k+1}(n-1)!\,\sigma_k^{n-1}(d_1+\cdots+d_k)$$

$$= n!\left\{\sigma_k^n(d_1,\ldots,d_k) + d_{k+1}\sigma_k^{n-1}(d_1+\cdots+d_k)\right\}$$

$$= n!\,\sigma_k^n(d_1,\ldots,d_k)$$

$$f(x+d_1+\cdots+d_k+d_{k+1}) = f(x+d_1+\cdots+d_k) + d_{k+1} f'(x+d_1+\cdots+d_k)$$

$$= \sum_{n=0}^{k} f^{(n)}(x)\,\sigma_k^n(d_1,\ldots,d_k)$$

$$+ d_{k+1}\sum_{n=0}^{k} f^{(n+1)}(x)\,\sigma_k^n(d_1,\ldots,d_{k+1})$$

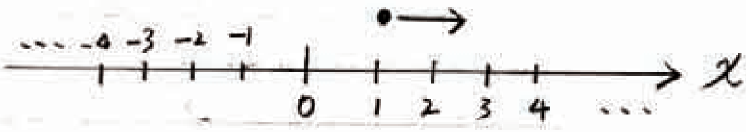
$$= \sum_{n=0}^{k+1} f^{(n)}(x)\left\{\sigma_k^n(d_1,\ldots,d_k) + d_{k+1}\sigma_k^{n-1}(d_1,\ldots,d_k)\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{k+1} f^{(n)}(x)\,\sigma_k^n(d_1, \dots, d_k, d_{k+1})$$

No 6　1/20

微分方程式

質点の一直線上の運動



時刻 t のときの質点の位置

$$x = x(t)$$

$x(t)$ が予め e^t と分かっていたとする。

このとき

$$x' = e^t = x$$

$$\underbrace{x'}_{\text{速度}} = \underbrace{x}_{\text{位置}}$$

解くとか、解けないとかの前に・・・

速度が位置と等しいので もし $x=0$ なら点は動かない。

しかし正(負)に少しずれれば正(負)に向かって動いていく。

No.

Date

$$\left(\frac{x(t)}{e^t}\right)' = \frac{x(t)'e^t - x(t)e^t}{e^{2t}} \quad \left(x(t)' = x(t)\right)$$

$$= \frac{x(t) - x(t)}{e^t} = 0$$

つまり $\dfrac{x(t)}{e^t} = k$: const

$\underline{x(t) = ke^t}$　　$\boxed{x' = x \text{ の一般解}}$

kって何?

ところで $t=0$ とすると $x(t) = k \cdot e^0 = k$ より

kは時刻 $t=0$ における点の位置である

初期条件

初期条件を与えてやれば方程式の解は unique に求まる.

Newton 力学 : 決定論的

今の状態が分かれば 10秒後, 10日後, 10年後の運動まで記述できる.

No.
Date

微分

$$x(t+d) = x(t) + x'(t)d$$

今、質点の運動が $x' = x$ という法則に基づいているとする。

$t=0$ のとき　$x(0) = k$

$t = d_1 \in D$ のとき　$x(d_1) = x(0) + x'(0)d_1$

$$= k + kd_1$$

$$= k(1+d_1)$$

$t = d_1 + d_2$ のとき　$x(d_1+d_2) = x(d_1) + x'(d_1)d_2$

$d_1, d_2 \in D$

$$= x(d_1)(1+d_2)$$

$$= k(1+d_1)(1+d_2)$$

$$= k(1+d_1+d_2+d_1d_2)$$

$t = d_1+d_2+d_3$　$x(d_1+d_2+d_3) = x(d_1+d_2) + x'(d_1+d_2)d_3$

$$= x(d_1+d_2)(1+d_3)$$

$$= k(1+d_1)(1+d_2)(1+d_3)$$

$$= k(1+d_1+d_2+d_3+d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3+d_1d_2d_3)$$

前回の話を踏まえれば (see. No.5 Taylor展開)

$$x(d) = k\left\{1+d+\frac{d^2}{2}\right\} \quad (d = d_1+d_2)$$

$$x(d) = k\left\{1+d+\frac{d^2}{2!}+\frac{d^3}{3!}\right\} \quad (d = d_1+d_2+d_3)$$

No.

Date

Report I　$d \in D_n$

今、扱っている x について

$$x(d) = k\left\{1 + d + \frac{d^2}{2!} + \cdots + \frac{d^n}{n!}\right\}$$

を証明せよ。

$x(t) = \sin t$ とすると

$x(t)' = \cos t$

$x(t)'' = -\sin t = -x(t)$

今度は $x'' = -x$ という関数を考える

上記からとりあえず $x(t) = \sin t$ は解の1つに間違いない。

同じように考えると $x(t) = \cos t$ も解の1つ

cf. $\left(\begin{array}{l} x' = x \text{ を 1階の微分を含む1階の微分方程式という。} \\ x'' = x \text{ を 同様に 2階の微分方程式という。} \end{array}\right)$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

連立の1階の方程式に分解する

今、時刻 $t=0$ のとき

$x(0) = k_1$　,　$y(0) = k_2$　とする

$$\begin{cases} x(d_1) = x(0) + x'(0)\,d_1 \\ \qquad\;\; = k_1 + k_2 d_1 \\ \\ y(d_1) = y(0) + y'(0)\,d_1 \\ \qquad\;\; = k_2 - k_1 d_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(d_1+d_2) &= x(d_1) + x'(d_1)\,d_2 \\ &= (k_1 + k_2 d_1) + (k_2 - k_1 d_1)\,d_2 \\ &= k_1\{1 - d_1 d_2\} + k_2\{d_1 + d_2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(d_1+d_2) &= y(d_1) + y'(d_1)\,d_2 \\ &= (k_2 - k_1 d_1) - (k_1 + k_2 d_1)\,d_2 \\ &= -k_1\{d_1 + d_2\} + k_2\{1 - d_1 d_2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(d_1+d_2+d_3) &= x(d_1+d_2) + x(d_1+d_2)'\,d_3 \\ &= \{k_1(1 - d_1 d_2) + k_2(d_1+d_2)\} + \underline{\{-k_1(d_1+d_2) + k_2(1-d_1 d_2}\, \times 0 \\ &= k_1\{1 - d_1 d_2 - d_1 d_3 - d_2 d_3\} + k_2\{1 + d_1 + d_2 + d_3 - d_1 d_1 d_3 \end{aligned}$$

$$y(d_1+d_2+d_3) = y(d_1+d_2) + y'(d_1+d_2)d_3$$

$$= \{-k_1(d_1+d_2)+k_2(1-d_1d_2)\} + \{-k_1(1-d_1d_2)-k_2(d_1+d_2)\}d_3$$

$$= -k_1\{d_1+d_2+d_3-d_1d_2d_3\}+k_2\{1-d_1d_2-d_1d_3-d_2d_3\}$$

再び $d=d_1+d_2$ などに置きかえると.

$$\begin{cases} x(d) = k_1 + k_2 d \\ y(d) = -k_1 d + k_2 \end{cases} \quad d \in D_1$$

$$\begin{cases} x(d) = k_1\left(1-\frac{d^2}{2}\right) + k_2 d \\ y(d) = -k_1 d + k_2\left(1-\frac{d^2}{2}\right) \end{cases} \quad d \in D_2$$

$$\begin{cases} x(d) = k_1\left(1-\frac{d^2}{2!}\right) + k_2\left(d-\frac{d^3}{3!}\right) \\ y(d) = -k_1\left(d-\frac{d^3}{3!}\right) + k_2\left(1-\frac{d^2}{2}\right) \end{cases} \quad d \in D_3$$

Report II
$x''=-x$ について一般解を予測し、それを証明せよ