No.

Date

数学的帰納法 (corollary)

$d_1, \cdots, d_n \in D = D_1 \Rightarrow d_1 + \cdots + d_n \in D_n$

$d_1 + \cdots + d_{n-1} \in D_{n-1}$

No. 5　1/13

Taylor 展開

数II まで 多項式関数 f

$$f(x+y) = f(x) + f'(x)y + \frac{f''}{2}(x)y^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}y^n$$

Kock-Lawvere の公理 (1学期ノートを参照)

$$f(x+\underset{D}{\underset{\cap}{d}}) = f(x) + f'(x)d \qquad d \in D = \{d \in R \mid d^2 = 0\}$$

point: f は任意の関数

$$f(\underline{x+d_1}+d_2) = f(x+d_1) + f'(x+d_1)d_2$$

$$= \{f(x) + f'(x)d_1\} + \{f'(x) + f''(x)d_1\}d_2$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x)d_1d_2$$

ここで

$$(d_1+d_2)^2 = d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2$$
$$= 2d_1d_2$$

従って $d_1d_2 = \frac{(d_1+d_2)^2}{2}$

よって

$$f(x+d_1+d_2) = f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + \frac{f''(x)}{2}(d_1+d_2)^2$$

$(d_1+d_2)^3=0$ だから $d_1+d_2 \in D_2$

$d \in D_2$ とすると

$$f(x+d) = f(x) + f'(x)d + \frac{f''(x)}{2}d^2$$

2次の Taylor展開

$d_1, d_2, d_3 \in D_1$

$$f(x+d_1+d_2+d_3)$$

$$= f(x+d_1+d_2) + f'(x+d_1+d_2)d_3$$

$$= \left\{f(x)+f'(x)(d_1+d_2)+f''(x)d_1d_2\right\} + \left\{f'(x)+f''(x)(d_1+d_2)+f'''(x)d_1d_2\right\}d_3$$

$$= f(x)+f'(x)(d_1+d_2+d_3)+f''(x)(\underline{d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3})+f'''(x)\,\underline{d_1d_2d_3}$$

$$(d_1+d_2+d_3)^2 = 2(d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3)$$

従って

$$d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^2}{2}$$

$$(d_1+d_2+d_3)^3 = 3!\,d_1d_2d_3$$

従って

$$d_1d_2d_3 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^3}{3!}$$

No.

Date

さらに
$$(d_1+d_2+d_3)^4=0$$
だから $d_1+d_2+d_3 \in D_3$.
よって
$d \in D_3$ として

$$f(x+d)=f(x)+f'(x)d+\frac{f''(x)}{2!}d^2+\frac{f'''(x)}{3!}d^3$$

Taylor 展開 $d \in D_n$

$$f(x+d)=f(x)+f'(x)d+\frac{f''(x)}{2!}d^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}d^n$$ (☆1)式

という予想はできる.

$$f(d_1,d_2,d_3)=d_1+d_2+d_3$$
とすると 第1〜3成分を入れかえても値が同じ ⇒ 対称式

$$g(d_1,d_2,d_3)=d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3$$
$$h(d_1,d_2,d_3)=d_1d_2d_3$$ なども対称式

これら上記を特に基本対称式という.

$\sigma_3^1(d_1,d_2,d_3)=d_1+d_2+d_3$ (「d_1,d_2,d_3からなる1次の基本対称式」という)

$\sigma_3^2(d_1,d_2,d_3)=d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3$

$\sigma_3^3(d_1,d_2,d_3)=d_1d_2d_3$

k この単項式からなる n 次の基本対称式を以下の形で示すものとする

$$\sigma_k^n(d_1, \cdots, d_k)$$

$$\left[\begin{array}{l} d_1, \cdots, d_k \in D \\ f(x + d_1 + \cdots + d_k) = f(x) + f'(x)\sigma_k^1(d_1, \cdots, d_k) + \cdots\cdots \\ \qquad = \sum_{n=0}^{k} f^{(n)}(x)\,\sigma_k^n(d_1, \cdots, d_k) \end{array}\right]$$

(※₂)式

(※₂) ⇒ (※₁) を示していきたい.

Lemma (補題)

$$(d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_k)^n = n!\,\sigma_k^n(d_1, \cdots, d_k)$$

proof by induction on k ― k に関する帰納法による証明 ―

Lemma

$$\sigma_{k+1}^n(d_1, \cdots, d_{k+1}) = \sigma_k^n(d_1, \cdots, d_k) + d_{k+1}\,\sigma_k^{n-1}(d_1, \cdots, d_k)$$

これを用いる.

例)
$$\begin{aligned} \sigma_3^2 &= d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3 \\ &= d_1 d_2 + d_3(d_1 + d_2) \\ &= \sigma_2^2 + d_3\,\sigma_2^1 \end{aligned}$$

No.

Date

$d_{k+1} \in D$ より $d_{k+1}{}^2=0$

$$(d_1+\cdots\cdots+d_k+d_{k+1})^n = \underbrace{(d_1+\cdots+d_k)^n}_{n!\,\sigma_k^n(d_1,\cdots,d_k)} + n d_{k+1}(d_1+\cdots+d_k)^{n-1}$$

$$= n!\,\sigma_k^n(d_1,\cdots,d_k) + n d_{k+1}(n-1)!\,\sigma_k^{n-1}(d_1+\cdots+d_k)$$

$$= n!\left\{\sigma_k^n(d_1,\cdots,d_k) + d_{k+1}\sigma_k^{n-1}(d_1+\cdots+d_k)\right\}$$

$$= \underline{n!\,\sigma_k^n(d_1,\cdots,d_k)}$$

$$f(x+d_1+\cdots+d_k+d_{k+1}) = f(x+d_1+\cdots+d_k) + d_{k+1}f'(x+d_1+\cdots+d_k)$$

$$= \sum_{n=0}^{k} f^{(n)}(x)\,\sigma_k^n(d_1,\cdots,d_k)$$

$$+ d_{k+1}\sum_{n=0}^{k} f^{(n+1)}(x)\,\sigma_k^n(d_1,\cdots,d_{k+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{k+1} f^{(n)}(x)\left\{\sigma_k^n(d_1,\cdots,d_k) + d_{k+1}\sigma_k^{n-1}(d_1,\cdots,d_k)\right\}$$

No.

Date . .

$$= \sum_{r=0}^{k+1} f^{(r)}(x)\, \sigma_k^r(d_1, \ldots, d_k, d_{k+1})$$