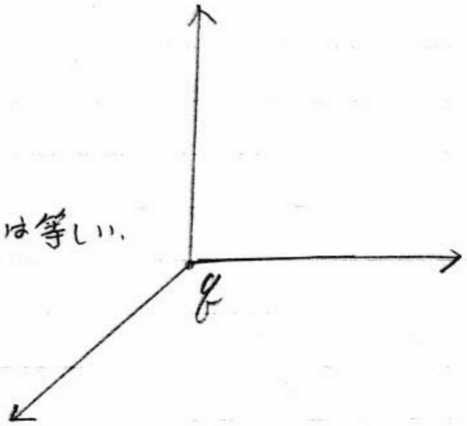
No.

Date

原点に点電荷 q をおく
空間は一様で他に力を及ぼすものが
何もないとすると 原点中心の球面において
・球面上の任意の点で電場は垂直
・回転によってどの点でも電場の大きさは等しい.



$|\mathbb{x}| = r$

$$f(4\pi r^2) = 4\pi k q$$

$$f = \frac{kq}{r^2}$$

No. 4 1/8

静電気学

ほとんど同じもの

クーロンの法則 $\Leftarrow \Rightarrow$ Gauss の法則

Gaussの
発散定理

質点
点電荷 } 理想化した概念

点電荷は連続分布していると考えられる

$\Downarrow$

各点 $\mathbb{x}$ について $\rho(\mathbb{x})$ 電荷密度を考えることができる.

Ω : Σ で囲まれる領域
Σ : 閉曲面 (空間を2つに区切る), $\mathbb{E}$: 電場

$$\int_{\Sigma} \mathbb{E} \cdot dS = \int_{\Omega} \rho(\mathbb{x})\, dV \quad \text{[Gauss の法則]}$$

面積分　　　　体積分

発散 div

ある点 x を囲む微小閉曲面での面積分を
空間体積で割ったもの
ということで Gauss の法則から

$$\mathrm{div}\,\mathbb{E} = \rho$$

Gaussの法則 → $\mathrm{div}\,\mathbb{E} = \rho$

逆に、$\mathrm{div}\,\mathbb{E} = \rho$ を仮定すると

$$\int_\Sigma \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} = \int_\Omega (\mathrm{div}\,\mathbb{E})\,dV$$

$$= \int_\Omega \rho\, dV.$$ Gaussの法則

つまり、

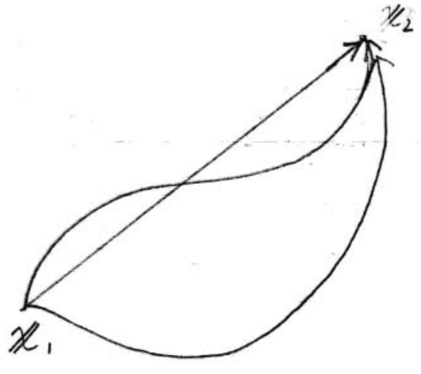
「$\int_\Sigma \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} = \int_\Omega \rho(x)\, dV$」 ⇔ 「$\mathrm{div}\,\mathbb{E} = \rho$」

積分形
・意味の把握に長ける

微分形
・計算において有利

力学

保存力 $f(x)$ (力の場)
道は無限に考えられる。
↓
そのときの仕事 — 線積分
始点と終点が定まる
線積分が一定 ⇔ 保存力



No.

Date

potential energy

$$\mathbf{f} = -\mathrm{grad}\,\varphi \quad (\varphi\text{はスカラー場})$$

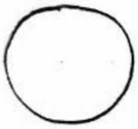
$$\Updownarrow$$

$\mathbf{f}$は保存力

φが見つかれば保存力であるが発見するのは一般に困難。

$\| $ 積分計算

rot



$\underset{\gamma}{\underline{\text{閉曲線}}}$を縁とする$\underset{\Sigma}{\underline{\text{閉曲面}}}$

Stokesの定理

$$\int_\gamma \mathbf{f}\,d\mathbf{r} = \int_\Sigma (\mathrm{rot}\,\mathbf{f})\cdot d\mathbf{s}$$

保存力ならば

左辺は$\underline{\text{いつでも}}$0 $\Rightarrow$ 右辺も0 $\Rightarrow$ $\mathrm{rot}\,\mathbf{f} = 0$

道によらない

(γ)

つまり

$$\underline{\underline{\mathbf{f}\text{は保存力} \Longleftrightarrow \mathrm{rot}\,\mathbf{f} = 0}}$$

$\|$

微分計算でgrad側の上の同値よりずっとやりやすい。

以上「ベクトル解析について」

No.

Date

微分方程式

数Ⅱ　多項式

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$　　n：有限値で終わる.

$f(x) = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \cdots + a_n(x-\alpha)^n$

$f(\alpha) = a_0$

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-\alpha) + \cdots$

$f'(\alpha) = a_1$

同様に

$\dfrac{f''(\alpha)}{2!} = a_2$

$\dfrac{f'''(\alpha)}{3!} = a_3$

$\vdots$

$\dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = a_n$

無限級数・巾（べき）級数

$\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \dfrac{1}{7!}x^7 + \cdots$　　（奇関数）

$\cos x = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \dfrac{1}{6!}x^6 + \cdots$　　（偶関数）

No.

Date

$$(e^x)' = e^x$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

複素数　$x \in \mathbb{R}$ だったが $x \in \mathbb{Z}$ (複素数) に拡張してみると

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right)$$

$$= \cos x + i \sin x$$

$$\Downarrow$$

加法定理 と 指数法則 は
複素数の世界でつながっている　Euler が発見

$D_1 = D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$　1次の無限小

D はスカラー倍について閉じている。

$$(\alpha d)^2 = \alpha^2 d^2 = 0$$

$d_1, d_2 \in D$

$$(d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2$$

$$= 2d_1d_2$$

足し算については閉じていない。

No.

Date

$D_2 = \{d \in R \mid d^3 = 0\}$ 2次の無限小

$D_3 = \{d \in R \mid d^4 = 0\}$ 3次の無限小

⋮

$D_n = \{d \in R \mid d^{n+1} = 0\}$ n次の無限小、

足し算について閉じていないが

$$(d_1 + d_2)^3 = d_1^3 + 3d_1^2 d_2 + 3d_1 d_2^2 + d_2^3$$
$$= 0$$

つまり

$$d_1, d_2 \in D_1 \Longrightarrow d_1 + d_2 \in D_2$$

一般に

$$d_1 \in D_k \text{ かつ } d_2 \in D_l \Rightarrow d_1 + d_2 \in D_{k+l}$$

$(d_1 + d_2)^{k+l+1}$ 展開しなくても以下のようにして考えれば
これは分かる

$$= (d_1 + d_2)(d_1 + d_2) \cdots (d_1 + d_2)$$

d_1かd_2かどちらかを必ずとる

⇓

d_1を$k+1$個以下とりかつd_2を$l+1$個以下とるような
とり方はありえない

No.

Date

数学的帰納法 (corollary)

$d_1, \cdots, d_n \in D = D_1 \Rightarrow d_1 + \cdots + d_n \in D_n$

$d_1 + \cdots + d_{n-1} \in D_{n-1}$