No.

Date

ベクトル場 $\mathbb{H}$ を

$$\mathbb{H}(x,y,z) \longmapsto (x,y,z)$$ とする

$$\mathrm{div}\cdot\mathbb{H} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

球について過去のレポートで扱った.

$$\int_\Sigma \mathbb{H}\cdot dS = 4\pi a^3 \quad (\leftarrow \text{かなり辛かった})$$

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbb{H}\, dv = 3\times\int_\Omega dv = 3\times\frac{4\pi}{3}a^3 = 4\pi a^3$$

No. 3 12/16

Gaussの発散定理 (Divergence Theorem)

$\mathbb{f}$: ベクトル場 in $\mathbb{R}^3$

Σ : 閉曲面

Ω : Σで囲まれた領域

$$\underbrace{\int_\Sigma \mathbb{f}\cdot dS}_{\text{面積分}} = \underbrace{\int_\Omega (\mathrm{div}\,\mathbb{f})\cdot dV}_{\text{体積分}}$$

div $\mathbb{f}$ とは…

その点の近傍での単位体積あたりの湧き出し

正 : 湧き出し

負 : 吸い込み

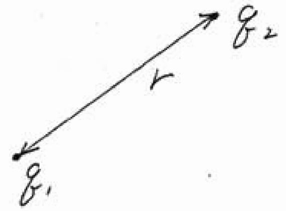
0 : 通過

発散定理は面積分と体積分の変換に有効

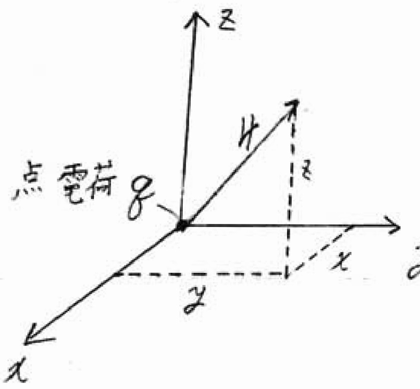
◎ 静電気学

クーロンの法則

$$k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$



今、空間中のある点電荷を原点とするとクーロンの法則から原点から $\boldsymbol{r}$ はなれた点に働く電場は



$$kq\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad (r=|\boldsymbol{r}|)$$

$$= kq\,(x,y,z)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

ただし $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$

少し話を一般化して

$$(x,y,z)(x^2+y^2+z^2)^{\alpha} \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

div をとる

⇓

$$\frac{\partial x(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}{\partial x}+\frac{\partial y(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}{\partial y}+\frac{\partial z(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}{\partial z}$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{\alpha}+2\alpha x^2(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}$$

$$+ (x^2+y^2+z^2)^{\alpha}+2\alpha y^2(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}$$

$$+ (x^2+y^2+z^2)^{\alpha}+2\alpha z^2(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}$$

$$= 3(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}+2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\alpha} = (3+2\alpha)(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}$$

つまり $\mathrm{div}\ \mathbb{H}(x^2+y^2+z^2)^{\alpha} = 0$

となるのは $\alpha = -\frac{3}{2}$ のとき.

$\Downarrow$

重要!) クーロンの法則は発散が 0 となる状態に対応している

注意が必要

原点中心, 半径 a の球を考える

この球面上には球面に垂直に $\frac{kq}{a^2}$ のベクトルが立つ.

つまり球面全体では

$$\frac{kq}{a^2} \times 4\pi a^2 = 4\pi kq$$

ガウスの発散定理を考えると体積分 $= 0$ に反する

$\Downarrow$

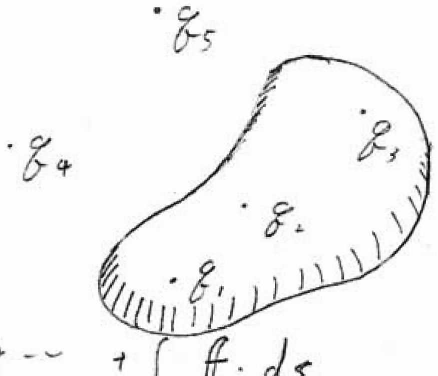
適応条件として閉曲面と $\underline{\underline{\text{その内部について}}}$ ベクトル場が定義されている.

ことが挙げられる

$\Downarrow$

原点においてベクトル場が定義されていないため
ガウスの発散定理は成り立たない。一方原点を Ω や
Σ に含まないとき発散定理は適用できる.

合成された電場



$$\mathbb{f} = \mathbb{f}_1 + \mathbb{f}_2 + \mathbb{f}_3 + \mathbb{f}_4 + \mathbb{f}_5$$

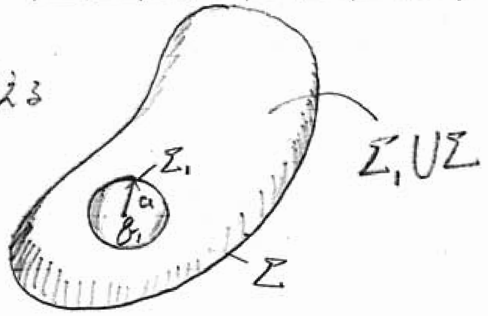
$$\int_{\Sigma} \mathbb{f} \cdot dS$$

$$= \int_{\Sigma} \mathbb{f}_1 \cdot dS + \int_{\Sigma} \mathbb{f}_2 \cdot dS + \cdots + \int_{\Sigma} \mathbb{f}_5 \cdot dS$$

まず発散定理から $\int_{\Sigma} \mathbb{f}_4 \cdot dS = 0$, $\int_{\Sigma} \mathbb{f}_5 \cdot dS = 0$

さらに今話を q_1 に集中する

点電荷の周りに微小な球面 Σ_1 を考える



$\Downarrow$

$$\int_{\Sigma_1 \cup \Sigma} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s} = 0 \quad \text{（発散定理）}$$

$\|$

よって

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s} - \int_{\Sigma_1} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{s} = 0$$

→ 今、$\Sigma_1 \cup \Sigma$ の内側にいる人から見て外向きとは
$\underline{\underline{\Sigma_1 \text{ において } q_1 \text{ 側のこと}}}$

$\|$

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\Sigma_1} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{s} = 4\pi k q_1$$

<u>Gaussの法則</u>

一般的な閉曲面を相手にしながら結果が容易に求まる。

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s} = 4\pi k (q_1 + q_2 + q_3)$$

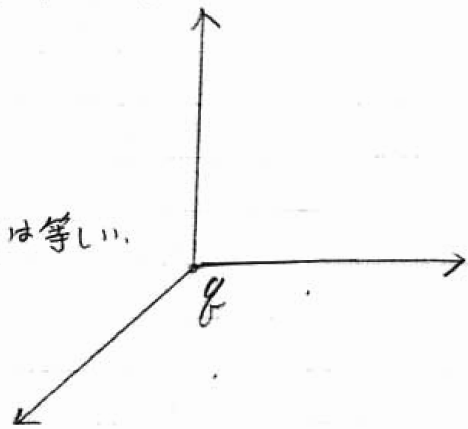
クーロンの法則 $\Longrightarrow$ Gaussの法則

逆は真か？

No.

Date

原点に点電荷 q をおく
空間は一様で他に力を及ぼすものが
何もないとすると 原点中心の球面において
・球面上の任意の点で電場は垂直
・回転によってどの点でも電場の大きさは等しい。



$|x| = r$

$f(4\pi r^2) = 4\pi k q$

$f = \frac{kq}{r^2}$

No.

Date

体積分

2次の微分形式 $\longleftrightarrow$ 3次の微分形式

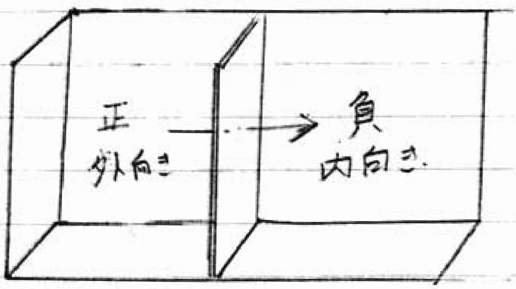
ω 　　　　　　　　　　　　$d\omega$

$$\boxed{\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega}$$

閉曲面で囲まれた領域

これが無限小の level で成り立つように $d\omega$ (3次) を定めた

しかし 隣り合う部分があればその部分は打ち消し合う



No. 2　　12/9

dictionary

ベクトル解析の世界

場

スカラー場　$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

ベクトル場　$fe_1 + ge_2 + he_3$　$f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

ベクトル場　$fe_1 + ge_2 + he_3$

スカラー場　φ

微分形式の世界

0次の微分形式 $\xrightarrow{d}$ 1次の微分形式 $\xrightarrow{d}$ 2次の微分形式 $\xrightarrow{d}$ 3次の微分形式

1次: $f dx + g dy + h dz$

2次: $f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$

3次: $\varphi\, dx \wedge dy \wedge dz$

d : 外微分作用素