体積分

2次の微分形式 $\longleftrightarrow$ 3次の微分形式

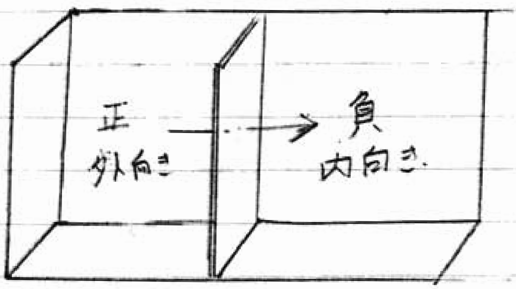
ω $\qquad\qquad$ $d\omega$

$$\boxed{\int_{\partial V}\omega=\int_V d\omega}$$

閉曲面で囲まれた領域

これが無限小のlevelで成り立つように $d\omega$ (3次)を定めた

しかし 隣り合う部分があればその部分は打ち消し合う



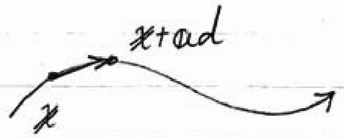
No. 2 12/9

dictionary 場

ベクトル解析の世界	スカラー場 $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$	ベクトル場 $fe_1+ge_2+he_3$, $f.g.h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$	ベクトル場 $fe_1+ge_2+he_3$	スカラー場 φ
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
微分形式の世界	0次の微分形式 $\xrightarrow{d}$	1次の微分形式 $\xrightarrow{d}$	2次の微分形式 $\xrightarrow{d}$	3次の微分形式
		$fdx+gdy+hdz$	$fdy\wedge dz+gdz\wedge dx+hdx\wedge dy$	$\varphi\, dx\wedge dy\wedge dz$

d : 外微分作用素

◎ 0次 ⟶ 1次 ：多変数の微分



$$\gamma(d) = x + \alpha d$$
$$d \in D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$$

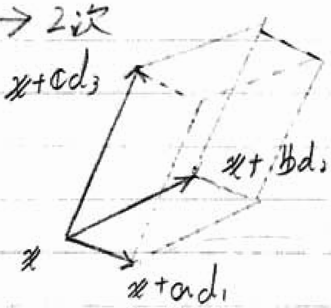
$$\int_{\underbrace{\partial\gamma}_{\text{境界}}} \varphi = \int_{\gamma} d\varphi$$

(無限小の level での) 微積分の基本定理

⇓

高次元へ一般化 (Stokesの定理)

◎ 1次 ⟶ 2次



このときは3つのベクトルで張られる平行六面体の体積だった

$$\varphi \longrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$f\,dx + g\,dy + h\,dz \longrightarrow \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\wedge dy$$

$$f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy \longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

No.

Date

つまり

スカラー場 φ $\xrightarrow{\text{grad}}$ $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$

ベクトル場(力) $fe_1+ge_2+he_3$ $\xrightarrow{\text{rotation}}$ $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial y}-\dfrac{\partial g}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}-\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$

ベクトル場(流れ) $fe_1+ge_2+he_3$ $\xrightarrow{\text{divergence}}$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial h}{\partial z}$ スカラー場 φ

rotationが
少し煩雑かも知れないが・・・

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\,\omega_2 \wedge \omega_1$$

(特に $\omega_1 = \omega_2$ のとき
$\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$)

のくさび形積を使えば

$$d(f\,dx + g\,dy + h\,dz)$$
$$= df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right)\wedge dy + \left(\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial z}dz\right)\wedge dz$$
$$\Downarrow$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{dx\wedge dx}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz\wedge dx + \cdots\cdots$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz\wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x}dx\wedge dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\wedge dy + \frac{\partial h}{\partial x}dx\wedge dz + \frac{\partial h}{\partial y}dy\wedge dz$$
$$= \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

divergence もこの考えで忘れても取り戻せる

$$d(f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy)$$
$$= df\wedge dy\wedge dz + dg\wedge dz\wedge dx + dh\wedge dx\wedge dy$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial g}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial h}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy$$

① ② で2回 つまり正符号　　① ② で2回 つまり正符号

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

2次 ⟶ 3次

$\mathbb{f}$ ベクトル場 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Σ は閉曲面
Ω は Σ で囲まれる領域

$$\int_\Sigma \mathbb{f}\cdot dS = \int_\Omega \underbrace{div\cdot\mathbb{f}}_{\text{スカラー}}\, dV$$

面積分　　　体積分

ところで div はどのようにして決まったものかを思い出すと、
左辺は単位面積から溢れ出る流れの量の積分
右辺はスカラーと単位体積の積の積分
つまり $div\cdot\mathbb{f}$ とは『単位体積あたりのわき出し量』として定められた。

上式の関係を Gauss の発散定理という。

No.

Date

ベクトル場Hを

$$H(x,y,z) \longmapsto (x,y,z)$$ とする.

$$\mathrm{div}\cdot H = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

球について過去のレポートで扱った.

$$\int_{\Sigma} H\cdot dS = 4\pi a^3$$ (← かなり辛かった)

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}\,H\, dv = 3 \times \int_{\Omega} dv = 3 \times \frac{4\pi}{3} a^3 = 4\pi a^3$$